

Inhalt

Inhalt.....	3
Einleitung und Vorbemerkung.....	5
Rechnen mit positiven und negativen Zahlen und mit Unbekannten (Platzhaltern)	6
A	6
B	7
C	7
Einfache Gleichungen	8
Terme – Zusammenfassen	8
Etwas schwierigere Gleichungen.....	9
A Beliebige Rechenzeichen:.....	9
B Glieder mit x kommen auf beiden Seite der Gleichung vor:	9
Addition und Subtraktion algebraischer Summen – Gleichungen	10
A Nur Pluszeichen.....	10
B Minuszeichen in der Klammer.....	10
C Minuszeichen vor der Klammer.....	10
D Nur Minuszeichen.....	11
E Komplexere Terme	11
F Komplexere Gleichungen	12
Multiplikation von Termen und Klammern - Gleichungen	13
A Multiplikation ganzer und algebraischer Zahlen.....	13
B Terme mit Faktoren und komplexen Klammerausdrücken, positive Rechenzeichen	13
C Terme mit Faktoren und komplexen Klammerausdrücken, negative Rechenzeichen	14
D Negative Rechenzeichen in der Klammer	14
E Minuszeichen in und zwischen den Klammern und Anordnungen.....	14
F Mehrgliedrige Terme und komplexere Gleichungen	15
Potenzrechnung, Termberechnung, Gleichungen.....	16
A Potenzen – Einführungsbeispiele	16
B Nur positive Rechenzeichen in den Klammern	17
C Zweite Klammer mit Minuszeichen	17
D Erste Klammer mit Minuszeichen	18
E Beide Klammern mit Minuszeichen.....	18
F Alle Vor- und Rechenzeichen gemischt.....	19
Binomische Formeln.....	20
A 1. Binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	20
B 2. Binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	21
C 3. Binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	22
D Terme und Gleichungen mit allen Binomischen Formeln	23
Ausklammern.....	24
A Einfache und komplexere Terme	24
B Binome ausklammern.....	25
Brüche und Gleichungen - Erweitern und Kürzen.....	26
Multiplikation, Division und Ausklammern.....	26
Erweitern und Kürzen	27
A Erweitere die Brüche	27
B Ergänze den fehlenden Zähler.....	27

C Kürze die folgenden Brüche	27
Addition und Subtraktion von Brüchen	28
A - Gleiche Nenner	28
B - Ungleiche Nenner.....	28
Multiplikation und Division von Brüchen	30
Textaufgaben	33
Allgemeine Textaufgaben	34
Zahlenrätsel.....	36
Zahlenrätsel mit Brüchen.....	38
Vielerlei.....	39
Bewegungsaufgaben	41
Ermittlung des Alters.....	44
Füll- und Arbeitsaufgaben.....	45
Aus alten Rechenbüchern	46
Scherze, Denksportaufgaben	47
Geometrie – Flächen	50
Geometrie - Volumen.....	52
Pythagoras	54
Aufgaben mit π	55
Aufgaben zur Physik.....	56

Aufgaben zur Physik

Bedenke: ρ ist der Buchstabe für das Spezifische Gewicht. Dieses wird in g/cm^3 gemessen

1. Wie viel wiegt ein 5 kg schwerer Stein unter Wasser? $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$
2. Berechne das spezifische Gewicht eines Metallbarrens (8 x 15 x 50 cm), der 46,8 kg wiegt. Welches Metall ist es?
3. Wie schwer ist eine Goldkugel mit 5 cm Durchmesser? ($\rho = 19,25$; $V \hat{=} \frac{4}{3} \pi r^3$)
4. Elektrische Überlandleitungen sind manchmal aus Kupfer. Welchen Längenschwankungen ist ein zwischen zwei Masten gespannter Draht von 400 m Länge bei einem Temperaturunterschied von a) 30° b) 40° c) 50° unterworfen? (Wärme- Ausdehnungskoeffizient von Kupfer 0,000017)
5. Das Tragseil der Wallberg-Seilbahn am Tegernsee ist 2100 m lang. Welchen Längenunterschied müssen die Spangewichte bei einem Temperaturunterschied von -28° bis + 32° ausgleichen? (Wärme-Ausdehnungskoeffizient von Eisen 0,000012)
6. Mit einem Wellrad von 8 cm Durchmesser der Trommel soll eine Last von 175 kg emporgehoben werden. Der Durchmesser des Wellrades ist 1,50 m. Welche Kraft muss am Wellrad wirken?
7. Der Eiffelturm ist 300 m hoch. 100 m Eisen dehnen sich bei Erwärmung von 10° um 12 mm aus. Wie groß ist die Schwankung der Höhe des Eiffelturmes vom Winter (-20°) zum Sommer (+30°)?
8. Die Mangfallbrücke ist aus Stahlbeton. Sie ist 320 m lang. Wie groß ist der Längenunterschied zwischen Winter (-15°) nach Sommer (+25°)? Beton und Eisen dehnen sich auf 100 m um 12 mm bei Erwärmung um 10° aus.
9. Die Oberleitung bei der Eisenbahn ist aus Kupfer, das sich um 17 mm bei Erwärmung um 100 auf 100 m ausdehnt. Wie viel macht das auf 10 km bei 25° Temperaturunterschied aus?

Einleitung und Vorbemerkung

Zwei Worte tauchen jetzt häufiger im Mathematik-Unterricht auf: **Arithmetik** und **Algebra**. Das erste stammt aus dem Griechischen und ist aus dem Wort für Zahl abgeleitet. Es ist das „Vernügen, mit Zahlen umzugehen“. Heute bedeutet es etwa: „Rechenkunst mit Zahlen“.

Algebra stammt aus dem Arabischen und ist aus einem Buchtitel entstanden, der übersetzt heißt „Wiederherstellung und Ausgleich“ und zwar bei der Lösung und Umformung von Gleichungen. Hierbei tauchen auch Platzhalter für Zahlen auf. Bei den mittelalterlichen Arabern hieß die gesuchte, namenlose Unbekannte „schai“, abgekürzt mit dem Buchstaben „sch“.

Da die frühesten Übersetzungen in Andalusien erstellt wurden, übertrug man diesen Buchstaben so lautähnlich wie möglich ins Spanische zu „x“, das heute allerdings mehr wie ein kehliges „ch“ gesprochen wird.

Von diesem Buchstaben kommt aber die **Unbekannte X**, die wir heute als Platzhalter in Gleichungen verwenden (Hunke, 1965, S. 41, 89).

Das Wort **Term** verwenden die Mathematiker für beliebige Rechenausdrücke und zwar durchaus weit gefasst in seiner Bedeutung.

In der **Algebra** gibt es einige **Regeln**, die wichtigste ist allerdings, dass auf beiden Seiten einer Gleichung stets dasselbe getan werden muss. Wenn man die Gleichung bildhaft mit einer Apothekerwaage vergleicht, liegt man richtig.

In der **Arithmetik** sind vor allem die Rechen- und Vorzeichenregeln zu beachten. Man kann die **Vorzeichenregeln** vereinfachen, indem man die Anzahl der Striche zählt: Stoßen Vor- und Rechenzeichen aufeinander, ist das Resultat +, wenn die Anzahl aller Striche geradzahlig ist (2, 4, 6, ...), -, wenn die Anzahl der Striche ungeradzahlig ist (1, 3, 5, ...).

Bei den **Rechenregeln** gelten zusätzlich die Klammerregeln, die des Erweiterns und Kürzens bei Brüchen, des Zusammenfassens (Punkt- vor Strichrechnung), um nur die wichtigsten zu nennen.

Eine **Formelsammlung** ist stets hilfreich. Sie kann selbst geschrieben werden, man sollte sich aber nie scheuen, auch ein Druckwerk zu benutzen. Jedes Mathematik-Schulbuch liefert große Mengen zusätzlicher Übungsaufgaben, ältere Jahrgänge sogar mehr, als moderne Werke. Diese Sammlung ist ein Aufgabenheft, kein Lehrbuch! Das heute allein übriggebliebene Rechenhilfsmittel **Taschenrechner** wird erst sinnvoll eingesetzt, wenn die grundlegenden Rechengänge beherrscht werden. Er ersetzt das Üben von Arithmetik und Algebra nicht.

Kurze **Bemerkungen** vor jedem Aufgabentyp werden etwas *kleiner und kursiv* gesetzt. Sie stellen keine umfassende Erläuterung dar, sondern sollten als Tipps betrachtet werden, als Erinnerung an wichtige Rechenregeln.

Übrigens: Mathematik hat viel mit Eurythmie zu tun: Man muss es aktiv tun, sonst wird man nicht besser. Bei Eurythmie geht alles über die Bewegung der Glieder und des gesamten Körpers, bei Mathematik geht alles über die Bewegung der Gedanken. Bei Eurythmie darfst du nicht denken, sonst kannst du dich nicht richtig im Raum bewegen. Bei Mathematik darfst du nicht zappeln, sonst kannst du nicht richtig denken. Bei Eurythmie arbeitest du mit den Umkreiskräften, bei Mathematik mit denen des Punktes, von innen heraus. Beides fördert sich gegenseitig ungemein. Wenn du das nicht glaubst, dann mach einfach mal bei Gedankenverstopfung ein richtig fetziges „Halleluja“ (wenn du nicht weißt, was das ist, frage den Eurythmielehrer, wenn der nicht zufriedenstellend antwortet, den Gartenbaulehrer und zuletzt den Mathelehrer –ernst gemeint! – vor allem aber TU ES!!!)

Rechnen mit positiven und negativen Zahlen und mit Unbekannten (Platzhaltern)

A

Bedenke: Ist das Rechenzeichen $+$, so können die beiden Zahlen die Reihenfolge tauschen. Bei $-$ geht das nicht.

Und: Zähle die Anzahl der Vorzeichen-Striche, wenn du die Klammern auflöst.

Beispiele: $(+7) - (+4) = 7 - 4 = 3$ oder $(-6) + (+8) = (+8) + (-6) = 8 - 6 = 2$

Positives Rechenzeichen:

- | | | |
|--|--|--------------------------|
| 1. $(+3) + (+7)$ | 2. $(+3) + (-2)$ | 3. $(+3) + (+2)$ |
| 4. $(+5) + (+6)$ | 5. $(+4) + (+8)$ | 6. $(-2) + (+3)$ |
| 7. $(-5) + (+2)$ | 8. $(-5) + (-2)$ | 9. $(+5) + (-2)$ |
| 10. $(+13) + (-4) + (+5)$ | 11. $(-17) + (-2) + (+22)$ | 12. $(-8) + (-3) + (-2)$ |
| 13. $(-8) + (+3) + (-2)$ | 14. $(-8) + (-5) + (-6)$ | 15. $(-9) + (-4) + (-7)$ |
| 16. $(+15) + (-11) + (+3) + (+15) + (-20)$ | 17. $(-4) + (+6) + (-8) + (+5) + (-4)$ | |
| 18. $(-3a) + (-4a) + (+5a) + (+7a)$ | 19. $(-4x) + (+11x) + (-3x) + (+5x) + (-8x)$ | |

Negatives Rechenzeichen:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 20. $(+5) - (+4)$ ✓ | 21. $(+5) - (+5)$ ✓ | 22. $(+5) - (+7)$ ✓ |
| 23. $(+5) - (-1)$ ✓ | 24. $(+5) - (-3)$ ✓ | 25. $(-1) - (+6)$ ✓ |
| 26. $(-1) - (+1)$ ✓ | 27. $(-1) - (-1)$ ✓ | 28. $(-1) - (-3)$ ✓ |
| 29. $(-5) - (-20)$ | 30. $(-6) - (+14)$ | 31. $(+7) - (-3)$ |
| 32. $(+6) - (+6)$ | 33. $(-12) - (-11)$ | 34. $(+5) - (-7)$ |
| 35. $(+5) - (+7)$ | 36. $(-8) - (-6)$ | 37. $(-12) - (-14)$ |
| 38. $(+12) - (+12)$ | 39. $(-3) - (+5)$ | 40. $(-15) - (+12)$ |
| 41. $(-13) - (+13)$ | 42. $(-16) - (+8)$ | 43. $(+5) - (-3)$ |
| 44. $(+17) - (-14)$ | 45. $(-6) - (+8)$ | 46. $(+12) - (-3)$ |
| 47. $(+19) - (+3)$ | 48. $(-17) - (-14)$ | 49. $(+3) - (-3)$ |

Beide Rechenzeichen:

Bedenke: Löst man die Klammern auf, verschmelzen Rechenzeichen und Vorzeichen.

50. $(+30a) + (-5a) - (-6a) + (+2a) - (+3a)$
51. $(+15x) - (-12x) + (-3x) + (+4x) - (-5x)$
52. $(+25b) + (-10b) - (+5b) - (-5b) + (-3b)$
53. $(+32x) - (+10x) + (-8x) - (-6x) + (+2x)$
54. $(-17x) + (-15x) - (-3x) + (-6x) - (-8x)$
55. $(+19a) - (+18a) + (-3a) + (+5a) - (-6a)$

Aufgaben mit π

Bedenke: π ist der Buchstabe für die Kreiszahl.
Diese ist Kreisumfang geteilt durch Kreisdurchmesser.
Sie ist etwa 3,14. auf 10 Stellen genau: 3,1415926535...

1. Das z.Zt. (1975) größte Schwungrad der Welt ist im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching bei München in Verwendung. Es wird langsam auf Schwung gebracht und kann dann durch Abbremsung über einen Generator kurzzeitig sehr viel Strom liefern. Das Schwungrad ist 5,7 m lang und hat 2,9 m Durchmesser, es ist massiv aus Eisen. Ein cm^3 Eisen hat 7,3 g Masse. Wie viel wiegt es?
2. Nach einer Erzählung von Tolstoi bekommt ein Bauer das Land, um das er von Sonnenauf- bis Sonnenuntergang (12 Std.) herum pflügen kann. Man pflügt etwa 3 km je Stunde.
 - a) Angenommen, es gelingt ihm, einen geschlossenen Kreis zu pflügen. Wie viel Land hat er umgepflügt?
 - b) Wie viel Bauernhöfe zu 60 ha passen hinein?
3. Ein Vater will für seine Kinder im Garten ein rundes, 1 m tiefes Planschbecken von 1,80 m Durchmesser bauen.
 - a) Wie viel Einfassungsplatten zu 15 cm Breite braucht er?
 - b) Wie viel Wasser braucht er später für eine Füllung?
4. Auf einer Rolle mit 8 cm Durchmesser liegen 50 Windungen Schnur nebeneinander. Wie viel Meter sind das?
5. Die Ölleitung von Triest nach Ingolstadt hat 1 m lichten Durchmesser. Das Öl fließt mit 3,2 km/h. Wie viel Kesselwagen der Eisenbahn (25 m^3) wären nötig, um die Ölmenge einer Stunde zu transportieren?
6. Aus 2 t Eisen wird ein 2 mm starker Draht gewalzt. Wie viel Draht gibt das? 1 cm^3 Eisen wiegt $\rho = 7,8 \text{ g}$.
7. Ein Etikett soll eine Flasche von 7,6 cm Dicke umschließen. Wie lang muss es sein?
8. Eine Konservendose ist 12 cm hoch und hat 10 cm Durchmesser. Welchen Inhalt hat sie?
9. Ein Baumstamm ist 10 m lang und an den Enden 20 bzw. 40 cm dick. Wie viel m^3 Holz enthält er?
10. Es wird für astarmes Fichtenholz etwa 75,- € gezahlt. Was ist ein Baum wert, der 25 m lang ist und 80 cm bzw. 24 cm Durchmesser hat.

Pythagoras

1. a, b, c sind die 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, c ist die Hypotenuse. Berechne die jeweils fehlende Seite.

	a)	b)	c)		a)	b)	c)
A)	?	5	$6 \frac{2}{3}$	F)	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$?
B)	$3 \frac{3}{4}$?	$6 \frac{1}{4}$	G)	0,5	?	1,3
C)	$3 \frac{3}{5}$	$4 \frac{4}{5}$?	H)	?	2,4	2,6
D)	?	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	I)	15	?	25
E)	$\frac{3}{8}$?	$\frac{5}{8}$	K)	1,2	?	1,5

2. Ein 5 m hoher Eckpfahl soll durch einen Spanndraht gesichert werden. Der Draht wird in 4,80 m Höhe und in 3,60 m Entfernung auf der Erde befestigt. Wie lang ist er?
3. Ein einfaches Dachzelt ist 2 m lang, 80 cm hoch und 1,20 m breit. Der Stoff liegt 2,08 m breit. Wie viel Meter Stoff benötigt man (einschließlich Boden, ohne Verschnitt und ohne Nähte)?
4. Wie lang ist die Diagonale eines Rechteckes von 8 x 15 m?

B

Bedenke: Überflüssiges lässt man weg, oft die Klammern, wenn klar ist, was man meint.
Beispiel: $(+5x) + (-2x)$ ist gleichbedeutend mit $5x - 2x$, ausgerechnet $3x$.
Und: Nur Gleichartiges kann zusammengefasst werden!
Und weiter: Wenn es geht: Ordne und fasse geschickt zusammen.
Beispiel: $59 + 77 + 41 + 19 + 23 = (59 + 41) + (77 + 23) + 41 = 100 + 100 + 41 = 241$

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $47 + 69 + 71 + 63$ | 2. $49 + 80 + 21 + 120$ |
| 3. $637 + 117 + 363$ | 4. $94 + 79 + 15 + 91 + 45 + 56$ |
| 5. $245 - 67 + 122 - 188$ | 6. $-34 + 45 - 96 + 105$ |
| 7. $490 + 4593 - 2884$ | 8. $-564 + 2136 - 6482$ |
| 9. $4a + 5a + 18a + 21a$ | 10. $8b + 9b + 13b + 37b$ |
| 11. $3x + 8x + 11x + 7x$ | 12. $6x + 15x + 37x + 7x$ |
| 13. $4a + 5b + 6b + 6a$ | 14. $3a + 9b + 7a + 6a + 5b$ |
| 15. $20a + 17b + 8b + 15b$ | 16. $16a + 15a + 18b + 9a + 7b$ |
| 17. $68a - 46a + 5b + 21b$ | 18. $66a - 19a - 13a + 88b - 15b$ |
| 19. $8x + 10y + 12y + 9x$ | 20. $45x - 17x + 89y - 15y - 16y$ |
| 21. $52a + 10a - 12a - 10a$ | 22. $67x - 10x - 17y + 13y + 7y$ |
| 23. $38a - 15b + 10a - 18a$ | 24. $95x + 18y - 15x + 59y - 8y$ |

C

Bedenke: Beim Multiplizieren von Zahlen (egal ob mit oder ohne Unbekannte): Plus mal minus ergibt minus bzw. zähle die Anzahl der Striche der Vorzeichen!

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1. $(-16) \cdot (-5)$ | 2. $(-14) \cdot (+6)$ | 3. $(-12) \cdot (+12)$ |
| 4. $(+8) \cdot (-4)$ | 5. $(-16) \cdot (+8)$ | 6. $(-20) \cdot (-3)$ |
| 7. $(+6) \cdot (-5b)$ | 8. $(-3x) \cdot (-4)$ | 9. $(+5) \cdot (-3y)$ |
| 10. $(+9) \cdot (-12a)$ | 11. $(-8) \cdot (-13b)$ | 12. $(-12) \cdot (+4x)$ |
| 13. $(+4a) \cdot (-6)$ | 14. $(-8x) \cdot (+3)$ | 15. $(-12) \cdot (-11b)$ |

Bedenke: Unnötiges kann entfallen, also meist positive Klammern, positive Vorzeichen, der Malpunkt.

- | | | |
|---------------------|--------------|---------------|
| 16. $(-4) \cdot 5x$ | 17. $5x(-4)$ | 18. $22(-6a)$ |
| 19. $-22(6a)$ | 20. $15(9x)$ | 21. $-8(9b)$ |

Bedenke: Reihenfolge: Vor dem Multiplizieren erst die Klammer berechnen.

- | | | |
|---------------------|-------------------|-------------------|
| 22. $(-5)(3x + 6x)$ | 23. $-5(3x + 6x)$ | 24. $-5(3x - 6x)$ |
|---------------------|-------------------|-------------------|

Einfache Gleichungen

Bedenke: Sortiere: Unbekannte links, Zahlen rechts.

Und: Wandle den Text in eine Gleichung um.

Beispiel: Zähle zum Doppelten einer Zahl 5 dazu, so erhältst du 19.
Die Zahl ist x , das Doppelte also $2x$, vermehrt um 5 bedeutet $2x + 5$.
Die Gleichung wäre somit $2x + 5 = 19$ und das Ergebnis ist $x = 7$.

1. Wenn man zum Dreifachen einer Zahl 7 addiert, erhält man 22.
2. Wenn man zum Fünffachen einer Zahl 4 addiert, erhält man 34.
3. Addiert man zum Neunfachen einer Zahl 15, erhält man 114.
4. Wenn man vom Siebenfachen einer Zahl 12 abzieht, erhält man 51.
5. Subtrahiert man vom 15fachen einer Zahl 22, erhält man 158.

Positive Rechenzeichen:

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 6. $6x + 3x + 19 = 82$ | 7. $9x + 5x + 29 = 113$ |
| 8. $4x + 8 + 3x + 9 = 66$ | 9. $7x + 6 + 2x + 8 = 104$ |
| 10. $17x + 9 + 8x + 5 + 6x = 138$ | 11. $8x + 16 + 15x + 3x = 68$ |
| 12. $13x + 25 + 14 + 12x + 8x = 138$ | 13. $18x + 3 + 7x + 9x + 31 = 68$ |

Terme – Zusammenfassen

Grundsätzliches und ein Beispiel:

Wenn das Ordnen und Umstellen von Gleichungen schwer fällt, dann sollten Termumformungen geübt werden. Dies hat sehr viel mit Zimmeraufräumen zu tun.

Stell dir vor, die Wäsche von drei Wochen liegt herum (und sag mir nicht, du hättest noch nie so ein Zimmer gesehen, es muss ja nicht dein eigenes sein). Also, du findest folgendes:

11 Hemden, die gehören dir, denke	+11h		
14 T-Shirts, 10 gehören auch dir, denke	+14t	(-4t)	(4 T-Shirts sind nicht dein)
26 Socken, 18 nicht deine, aber 8 gehören dir, denke	+26s	-18s	(zusammen gibt das 8s !!)
3 T-Shirts sind dir zu klein sind, weg damit	-3t		
Und 2 Hemden gefallen dir nicht mehr	-2h		
Liste auf:	$11h + 14t - 4t + 26s - 18s - 3t - 2h$		
Ordne, auch alphabetisch, Klammern können helfen	$(11h - 2h) + (26s - 18s) + (14t - 4t - 3t)$		
Fasse zusammen	$9h + 8s + 7t$		

Jetzt weißt du, was in deinen Schrank gehört – Mathematik und Aufräumen gehören zusammen!

Bei Termumformungen besteht die Hauptarbeit im gedanklichen Ordnen, Umstellen und geschickten Zusammenfassen.

Bedenke: Terme sind keine Gleichungen. Hier muss vereinfacht werden, verdichtet.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $35a - 13b - 8a - 16a - 3b$ | 2. $75a - 16b - 9a - 35a - 46b + 3a$ |
| 3. $65x - 17y - 3x - 19y - 2y$ | 4. $95x - 78y - 17x - 35y + 4x - 16x$ |
| 5. $27x - 15y + 9x - 16y - 8y$ | 6. $25x - 5y + 28x - 19y - 37y + 6x$ |
| 7. $3x - 4y - 5x + 3z - y - z$ | 8. $18x - 9y - 6x + 7z - 16y + 18z$ |
| 9. $30a - 17b + 25b - a$ | 10. $65a - 27b + 35b - 8a$ |
| 11. $7x - 8y - 34y + 5x$ | 12. $18x - 16y + 37y - 6x$ |
| 13. $57a + 19b - 36b - 18a$ | 14. $19a - 17a - 15b - 13b$ |
| 15. $28a - 3b + 5b - 8b$ | 16. $6x + 18y - 29y + 13x$ |

13. Nach dem ersten punischen Krieg musste Karthago 3200 Talente Gold an Rom bezahlen.
 - a) Wie viel Tonnen waren das?
 - b) Wie viel war soviel Gold im Jahr 2000 wert? 1 Talent = 60 Minen, 1 Mine = 436,6 g. 1 kg Gold kostete im Jahre 2000 rund 10300 € = 20.145,- DM.
14. Eine Baugrube misst $12 \times 10 \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2}$ m. Zum Abfahren der Erde waren rd. 34 Fuhren nötig. Eine zweite Baugrube hat die Maße $17 \times 13 \times 2,9$ m. Wie viele Fuhren waren hier nötig?
15. Ein Schwimmbecken mit den Maßen $50 \text{ m} / 9,5 \text{ m} / 3,8 \text{ m}$ kann in 8 Stunden mit Wasser gefüllt werden. Bei dem gleichen Wasserzufluss soll ein Becken mit den Maßen $85 \text{ m} / 10,3 \text{ m} / 4,2 \text{ m}$ gefüllt werden. Wie lange dauert es?
16. Die Wege eines Gartens sind $1,8 \text{ m}$ breit und haben eine Gesamtlänge von 195 m . Sie sollen 6 cm hoch mit Kies bestreut werden. Der Kies wird in Karren zu 150 dm^3 angefahren. Bei einem zweiten Garten beträgt die Breite der Wege $2,1 \text{ m}$, ihre Länge 235 m . Der Kies soll 8 cm hoch aufgeschüttet werden. Wie viel Karren Kies werden jeweils benötigt?
17. Berechne das Volumen eines Wohnhauses mit Satteldach: $12,80 \text{ m}$ lang, $10,60 \text{ m}$ breit, $9,33 \text{ m}$ hoch bis zur Dachkante und $10,83 \text{ m}$ Firsthöhe. Beide Höhen über der Erdsohle, also einschließlich Kellergeschoss.
18. Die Cheops-Pyramide ist 147 m hoch, die Grundfläche ist ein Quadrat von 230 m Seitenlänge. In ihr sind schätzungsweise $1,3$ Millionen Steinblöcke von $2 \times 1 \times 1 \text{ m}$ verbaut worden.
 - a) Welches Gewicht hat ein Stein (bei der Annahme alle Steine seien gleich groß? $\rho = 2,6$)
 - b) Welches Gewicht hat die Pyramide?
 - c) Welchen Rauminhalt hat sie? ($V = \frac{1}{3} G \times h$)
19. Die Chinesische Mauer ist 16 m hoch, unten 8 und oben 5 m breit, sie ist 2450 km lang. (Welche Strecke wäre das in Europa, Luftlinie gemessen?)
 - a) Welchen Rauminhalt hat die Mauer?
 - b) Sie ist innen zum großen Teil mit Erde gefüllt; der Steinmantel betrage $\frac{1}{3}$ des Volumens, wie viel ist das?
 - c) Wie viel wiegt der Steinmantel ($\rho = 2,6$)?
 - d) Welches Volumen hat der Erdkern der Mauer?
 - e) Nehmen wir an, dass 200 Jahre zu 300 Arbeitstagen an der Mauer gearbeitet wurde. Wie viel t Steine bzw. m^3 Erde ($\rho = 1,7$) mussten dann täglich verbaut werden?
 - f) 14 Schubkarren Erde ergeben etwa 1 m^3 . Nehmen wir an, dass eine chinesische Trage für zwei Mann genau so viel Erde fasst. Wie viel Tragen Erde mussten dann täglich bewegt werden, um den Erdkern aufzuschütten?
 - g) Nehmen wir an, dass zwei Arbeiter mit einer Trage stündlich dreimal Erde herangeschleppt haben. Wie viel Arbeiter wären dann bei 10stündiger Arbeitszeit für das Heranschieben notwendig gewesen?
20. Vergleiche den Rauminhalt der Chinesischen Mauer mit dem der Pyramide.

Geometrie - Volumen

- Ein Container ist 2,4 m hoch und breit und a) 6 m, b) 9 m, c) 12 m lang. Welchen Rauminhalt haben diese drei Größen?
- Jemand meinte, $1/2 \text{ m}^3$ hätte als Würfel 75 cm Kantenlänge. Hat er sich geirrt? Wenn ja, um wie viel cm^3 ? Wie viel Liter sind das?
- Die Zündholzschachteln „Haushaltsware“ sind $55 \times 38 \times 16 \text{ mm}$ groß. Sie sind zum Versand in Pappschachteln gepackt, die $44 \times 26,6 \times 16 \text{ cm}$ groß sind. Wie viele Zündholzschachteln sind in der großen Pappschachtel?
- a) Man schätzt den täglichen Zündholzverbrauch auf der ganzen Erde auf 2,5 Milliarden Stück. Ein Zündholz hat den Querschnitt $2 \times 2 \text{ mm}$ und ist 4,5 cm lang. Wie viel m^3 Holz wird täglich für Zündhölzer verbraucht?
b) Vergleiche das mit dem Volumen des Klassenraumes.
- Eine Waldorfschule baut eine rechteckige Turnhalle von $18,5 \times 22 \text{ m}$ mit anschließender Bühne von $10 \times 18,5 \text{ m}$. Die Saaldecke steigt vom Saalende zur Bühne von 4 m auf 8 m an und fällt zur Bühnenrückwand auf 6 m ab. Der Bühnenboden liegt 1,20 m über dem Saalboden. Berechne:
a) die Saalfläche,
b) die Bühnenfläche,
c) den Rauminhalt von Saal und Bühne.
- Ein Bungalow ($17,60 \times 6,80 \text{ m}$) hat einen trapezförmigen Anbau von 7,20 m Länge und 5,30 m bzw. 4,60 m Tiefe. Auf das Dach wurde eine Kieselschicht ($s = 2,6$) von 5 cm aufgetragen.
a) Welche Last muss das Dach tragen?
b) Man rechnet, dass das Dach im Winter auch noch 30 cm Schnee ($\rho = 0,3$) tragen muss. Welche zusätzliche Dachlast wäre das?
- Eine Grundstückseinfahrt ($30,60 \times 5,20 \text{ m}$) soll erneuert werden. An der Seite soll ein Gehweg von 1,40 m Breite und 26,60 m Länge mit Platten zu $35 \times 35 \text{ cm}$ gelegt und die letzten 4 m sollen in voller Breite 12 cm dick betoniert werden. Der übrige Teil soll 12 cm hoch mit grobem Schotter aufgefüllt werden. Die ganze Fläche muss zuerst 10 cm hoch mit Sand bedeckt werden. Wie viel
a) Sand, b) Platten, c) Beton, d) Schotter muss der Unternehmer bestellen?
- Das Dach eines VW-Busses ist ca. $4 \times 1,5 \text{ m}$ groß. 1 m^3 gesetzter Schnee wiegt etwa 300 kg. Wie viel kg Schnee liegen auf dem Dach, wenn es 30 cm geschneit hat?
- 1 cm^3 lockerer Schnee wiegt etwa 0,2 g. Welches Gewicht lastet auf einem $12 \times 15 \text{ m}$ großen Flachdach, wenn es 25 cm geschneit hat?
- Ein Holzstoß von $2 \times 2,5 \times 6 \text{ m}$ wird als Papierholz ($32,- \text{ €/m}^3$) verkauft. Was bekommt der Waldbesitzer?
- Wie viel wiegt eine 5 cm starke Eichenholzplatte $1,20 \times 0,8 \text{ m}$? (spez. Gewicht $\rho = 0,80$)
- Kann ein Mann 1 m^3 Kork heben? Wie viel wiegt er? (spez. Gewicht $\rho = 0,24$)

Etwas schwierigere Gleichungen

A Beliebige Rechenzeichen:

Bedenke: *Sortiere: Unbekannte links, Zahlen rechts.*
Und: *Fasse zusammen, die Unbekannte muss am Ende allein stehen, isoliert.*

Beispiel: $6x - 3 - 2x + 34 + 7 = 18$
Ordnen: $6x - 2x = 18 - 34 + 3 - 7$
Zusammenfassen: $4x = -20$
Teile durch 4: $x = -5$

- | | |
|--|---|
| 1. $x - 1 - 3 = 8$ | 2. $2x - 3 - 7 = 14$ |
| 3. $5x - 4 - 8 = 13$ | 4. $8x - 11 - 7 = 14$ |
| 5. $6x - 4 + 5x - 8 + 2x - 9 = 70$ | 6. $32x - 7x - 9 - 38 - 4 = 24$ |
| 7. $18x - 13x - 5 - 29 + 2x = 41$ | 8. $16x - 49 + 4x - 17 - 7x = 38$ |
| 9. $25x - 11 - x - 14 - 31 + x = 44$ | 10. $20x - 38 + 3x - 16 + x = 18$ |
| 11. $8x - 18 - 15 + 5x - 8 - 47 = 29$ | 12. $12x + 4 - 3x + 8 - 2x = 47$ |
| 13. $15x + 9 + 11x - 10 = 25$ | 14. $7x + 6 + 4x - 9 + 2x - 7 = 81$ |
| 15. $18x + 17 - 5x - 31 + 8 - 13 = 98$ | 16. $24x + 39 - 13x - 93 + 4x + 19 = 100$ |
| 17. $18x - 29 + 4x + 47 - 8x + 13 = 101$ | 18. $14x - 119 + 23x + 165 - 22x = 196$ |
| 19. $29x - 27 - 8x + 48 - 7x = 105$ | 20. $3x - 5 + 8x - 26 - 13 = 0$ |
| 21. $5x - 8 + 11x + 9 + 4x = 81$ | 22. $9x + 12 - 6x - 7 + 5x - 21 = 0$ |
| 23. $21x - 28 + 5x - 5 + 38 - 12x = 47$ | 24. $18x + 12 - 19x + 8x - 24 - 9 = 0$ |

B Glieder mit x kommen auf beiden Seite der Gleichung vor:

Bei den etwas komplexeren Gleichungen ist es sinnvoll, die Probe nach Termen getrennt zu machen, also zuerst das Ergebnis in die linke Seite der Gleichung einsetzen und diese ausrechnen, dann dasselbe mit der rechten Seite der Gleichung machen, völlig getrennt von der linken Rechnung. Wenn beide Seiten übereinstimmen (Rechter Term = Linker Term), dann ist die Rechnung richtig. Das Ergebnis der Probe nach Termen getrennt wird zusätzlich zur Lösung angegeben.

- | | |
|--|--|
| 1. $5x + 4 = 3x + 12$ | 2. $19x + 11 = 13x + 23$ |
| 3. $8x - 4 = 6x + 10$ | 4. $9x - 7 = 7x + 13$ |
| 5. $14x - 6 + 18 + 4x = 4x + 26 - 15 + 99$ | 6. $8x - 4 + 13x - 29 = 7x + 28 - 61 + 56$ |
| 7. $30 - x + 23 + 8x = 87 - 3x - 10x + 26$ | 8. $35 - 9x + 43 + 6x = 22x - 3 + 6$ |
| 9. $66 - 3x - 4x + 17 = 39 - 2x - 3x + 30$ | 10. $96 - 9x - 7x + 20 = 83 - 6x - 5x - 2$ |
| 11. $63 + 5x - 8x + 6 = 46 + 10x + 2x - 7$ | |
| 12. $29x - 11 - 15x + 78 = 17x + 30 - 6x + 58$ | |
| 13. $35x + 16 - 91 - 17x = 25x + 91 - 13x - 100$ | |
| 14. $17x - 6 + 5x + 25 = 33x - 93 - 13x + 136$ | |
| 15. $85x - 57x - 23 + 12 = 73x + 75 - 55x + 14$ | |
| 16. $11x + 83 - 144 + 3x = 18x - 16 - 8x + 31$ | |
| 17. $105 - 5x - 16 - 4x = 12x + 24 - 11x - 5$ | |
| 18. $93 + 6x + 19 - 13x = 54 - 4x + 10x - 7$ | |
| 19. $75 - 19x + 22x - 18 = 63 + 14x - 23x + 66$ | |
| 20. $134 - 10x - 5x - 13 = 76 - 8x - 4x + 21$ | |
| 21. $103 - 15x - 37x + 55 = 26 - 5x - 37x + 44 + 58$ | |
| 22. $28 + 17x - 11x + 24 = 23 - 5x + 18x + 22$ | |
| 23. $63 - 18 - 13x + 3x = 19 - 5x - 4x + 26$ | |

Addition und Subtraktion algebraischer Summen – Gleichungen

Wenn man den Additionsvorgang abstrahiert, sieht man, dass es nicht darauf ankommt, welche Vorzeichen oder welches Rechenzeichen verwendet wird. So kann man anstelle 13 von einer Zahl abzuziehen, auch (-13) zu dieser Zahl dazuzählen. Weiterhin kann eine Additionsaufgabe Zahlen und Platzhalter (Buchstaben) enthalten. Deshalb spricht man ganz allgemein von algebraischer Summierung, wenn etwas addiert oder subtrahiert wird. Ist man noch sprechfauler, sagt man nur noch Summe dazu (und Mathematiker sind sprechfaul).

A Nur Pluszeichen

Bedenke: Klammerregeln beachten: Erst die Klammer ausrechnen bzw. neu sortieren.

Und: Bei den Gleichungen erst die Klammern, dann sortieren und den Rest erledigen.

- | | | |
|-----------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. $427 + (305 + 73)$ | 2. $7a + (8a + 6a)$ | 3. $(4a + 4b) + (5a + 7b)$ |
| 4. $957 + (128 + 43)$ | 5. $8x + (9x + 3x)$ | 6. $(4x + 5y) + (8x + 9y)$ |
| 7. $208 + (192 + 42)$ | 8. $6b + (5b + 9b)$ | 9. $(3a + 6b) + (4a + 5b)$ |

Gleichungen:

10. $(4x + 3) + (3x + 5) = (2x + 6) + (2x + 8)$
11. $(13x + 5) + (8x + 11) = (5x + 18) + (4x + 34)$
12. $(19x + 6) + (13x + 9) = (8x + 15) + (7x + 51)$
13. $(37x + 16) + (2x + 8) = (16x + 11) + (15x + 45)$
14. $(48x + 37) + (9x + 7) = (23x + 59) + (17x + 36)$
15. $(56x + 48) + (32x + 11) = (43x + 29) + (33x + 42)$

B Minuszeichen in der Klammer

Tipp: Rechne 399 wie $(400 - 1)$, also $562 + 399$ wie $562 + (400 - 1)$.

- | | | |
|----------------------|----------------|----------------------|
| 1. $912 + (19 - 12)$ | 2. $447 + 199$ | 3. $16x + (3x - 7y)$ |
| 4. $541 + (14 - 11)$ | 5. $335 + 49$ | 6. $25a + (4b - 5a)$ |
| 7. $916 + (27 - 16)$ | 8. $387 + 198$ | 9. $41x + (7y - 8x)$ |
10. $(3a - 6b) + (5b - 4a)$ 11. $(13x - 7y) + (9y - 4x)$ 12. $(18x - 23y) + (20x - 27y)$

Gleichungen:

13. $(8x - 9) + (3x - 7) = (5x - 3) + (2x - 1)$
14. $(6x - 15) + (7x - 13) = (5x - 4) + (6x - 6)$
15. $(18x - 29) + (16x - 47) = (13x - 17) + (9x - 11)$
16. $(35x - 49) + (41x - 73) = (29x - 56) + (35x - 18)$
17. $(59x - 53) + (73x - 61) = (41x - 32) + (48x - 39)$
18. $(73x - 93) + (48x - 56) = (67x - 53) + (36x - 6)$

C Minuszeichen vor der Klammer

Bedenke: Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, ändern sich beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen.

Und: Sortieren nach Alphabet nicht vergessen.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $915 - (17 + 15)$ | 2. $837 - (25 + 17)$ | 3. $546 - (36 + 8)$ |
| 4. $18a - (4a + 8b)$ | 5. $19x - (5x + 13y)$ | 6. $45a - (5b + 13a)$ |
| 7. $114x - (67y + 43x)$ | 8. $473z - (56x + 471z)$ | 9. $398x - (208x + 33y)$ |
10. $(3a + 6b) - (5b + 4a)$ 11. $(13x + 7y) - (9y + 4x)$ 12. $(18x + 23y) - (20x + 27y)$

16. Leimholzplatten kosten:
a) 120×20 cm 3,25 €, b) 100×40 cm 3,95 €, c) 200×60 cm 15,75 €. Berechne die Quadratmeterpreise.
17. Eine 100-jährige Buche hat ca. 200.000 Blätter zu ca. 22 cm^2 .
a) Wie viel m^2 Blattfläche sind das?
b) Welcher Anzahl an Schultischen ($1,20 \times 0,50$ m) entspricht diese Fläche? c) Wie viel Klassen zu 16 Tischen würden damit ausgestattet werden können? (b und c nur ganze Zahlen)
18. Der Forscher Tevis zählte im Wüstensand etwa 1 Mill. Samenkörner auf 3 m^2 . Wie viel Körner sind das auf 1 cm^2 ?
19. Wie viel Quadratmeter Papier sind für ein Telefonbuch (21×30 cm) mit 1250 Seiten nötig?
20. a) Wie viel wiegen 1000 Blatt Schreibpapier zu 80 g/m^2 (DIN A4: $21 \times 29,7$ cm)?
b) Können 1000 Blatt als Päckchen (2 kg) verschickt werden?
c) Wie viel Blätter darf man in einem Standardbrief (20 g) verschicken, wenn für den Umschlag 4 g gerechnet werden müssen?
21. Ein Stoff wird in zwei Breiten angeboten: 90 cm breit zu 15,66 € und 1,50 m breit zu 25,80 € das Meter. Welcher ist billiger?
22. Ein Rechteck hat 54 cm Umfang, eine Seite ist 9 cm lang, wie lang ist die andere?
23. Ein Rechteck hat 92 cm^2 Fläche, eine Seite ist 8 cm lang, wie lang ist die andere?
24. Verlängert man die Seite einer quadratischen Terrasse um 2,30 m, so ist das neue Quadrat $63,71 \text{ m}^2$ größer als das ursprüngliche. Wie groß ist dessen Quadratseite?
25. Ein quadratisches Blumenbeet ($a = 12,5$ m) soll um $155,75 \text{ m}^2$ vergrößert werden. Die eine Seite kann nur um 3,5 m verlängert werden. Um wie viel Meter muss man die andere Seite verlängern?
26. Von einem trapezförmigen Grundstück mit der längeren Grundseite von 22 m soll ein $122,5 \text{ m}^2$ großes Stück von 7 m Tiefe abgeteilt werden. Wie lang wird die Grundseite des abzuteilenden Stückes?
27. Ein Kanal mit rechteckigem Querschnitt ($12,60 \times 6,00$ m) soll in einen trapezförmigen mit gleichem Querschnitt umgebaut werden. Die Sohle soll $11,40$ m und die Oberkante $16,60$ m breit werden. Wie tief muss der Kanal werden?
28. Durch ein rechteckiges Baugrundstück ($23,5 \times 46,8$ m) muss an der hinteren Schmalseite ein Weg gebaut werden. Die Längsseiten werden dadurch um 3,20 bzw. 2,10 m kürzer. Wie groß ist das Grundstück dann noch?
29. Eine Pappfabrik stellt täglich 45 km Wellpappe, 2 m breit, her.
a) Wie viel km^2 sind das täglich?
b) Wellpappe wiegt etwa 250 g/m^2 . 1 kg wird für 0,65 € verkauft. Für wie viel € wird täglich Pappe hergestellt?
c) Wie schnell (m/sec) muss die Maschine laufen, damit in 24 Std. die 45 km Wellpappe hergestellt wird?
d) Gib einen markanten bzw. bekannten Punkt oder Ort an, der von Deiner Schule (oder von Deinem Wohnort) 45 km entfernt ist.
e) Wie viel Stunden müsstest du laufen, wenn du die 45 km mit 4 km/h zu gehen hättest?

Geometrie – Flächen

Bedenke: In der so genannten kaufmännischen Rechnungsart, die auch im Handwerk weit verbreitet ist, werden Brüche mit dem Schrägstrich als Teilungszeichen geschrieben und statt des Malpunktes ein „x“ verwendet.

- Es wird ein Grundstück (17,20 x 36,30 m) gegen ein schmaleres, gleich großes von 16,10 m Breite getauscht. Wie lang muss das Grundstück werden?
- Ein Wiesengrundstück von 54 m Tiefe wird in 5 Bauplätze verschiedener Breite aufgeteilt. Das erste ist 20,70 m breit und wird für 145.314,- € verkauft. Die anderen Bauplätze sind a) 17 m, b) 21,50 m, c) 19 m und d) 27,50 m breit. Was kosten diese beim gleichen Quadratmeterpreis?
- Eine Abwaschküche (11,20 x 4,30 m) soll neu verfliesen werden. Die Fliesen haben eine Kantenlänge von 20 cm. Wie viel Fliesen werden gebraucht?
- Ein Musikraum (8,50 x 12,60 m) soll neu mit Teppichfliesen (0,20 x 0,30 m) belegt werden. Wie viele Fliesen sind notwendig?
- Ein Flur soll mit 600 Fliesen (0,20 x 0,20 m) nachgefliesen werden. Von der gewünschten Farbe sind aber nur Fliesen in der Größe 18 x 20 cm vorhanden. Wie viele werden benötigt?
- An einer Holzlaube soll ein Schuppen 3,10 m breit, 2,50 m tief und 2,30 m hoch angebaut werden. Die eine Schmalseite wird von der Laube gebildet. Es stehen 3 m lange Bretter zu 18 cm und 22 cm Breite zur Verfügung. Die Reststücke können mit verbraucht werden. Wie viel Bretter würden für die drei Wände von jeder Sorte benötigt werden (einschl. der Tür)?
- Ein Zimmer (4,20 x 4,85 m, 2,50 m hoch) soll neu mit Raufasertapete tapeziert werden. Es hat eine Tür (2,03 x 0,98 m) und zwei Fenster (2,10 x 1,28 bzw. 1,30 x 1,28 m). Eine Tapetenrolle ist 10 m lang und 60 cm breit. Mit wie viel Rollen müsste man auskommen, wenn man noch 5 % Verschnitt rechnet?
- Andreas will sich ein Regal aus 2 cm starken beschichteten Spanplatten bauen. Es soll im Lichtmaß 2,10 m hoch/90 cm breit/25 cm tief werden und 7 Fächer enthalten. Die Seitenwände sollen die Rückwand und den fest eingebauten obersten Boden abdecken. Wie viel Quadratmeter Spanplatte braucht er (ohne Verschnitt)?
- Ein Saal wurde mit 60 Rollen von $6\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ m tapeziert. Bei dem nächsten Tapezieren werden Rollen von $15\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ m gewählt. Wieviel braucht man?
- Eine 5-köpfige Familie kann ihr Gemüse auf 7,5 a bei Intensivkultur selbst ziehen. Wie lang muss ein 1,5 m breites Beet für eine Person sein?
- Wie viel m² Papier sind für ein Telefonbuch nötig? Das Buch hat 1740 Seiten in der Größe 20 x 30 cm.
- Ein Haussockel (5,10 x 2,30 m) soll neu gestrichen werden. Er hat zwei Kellerfenster zu 1,20 m x 0,80 m. Auf der Farbdose steht: Ausreichend für 6 m² einmaligen Anstrich. Wie viel Dosen braucht man für einen dreifachen Anstrich?
- Eine Rolle Raufasertapete ist 57 cm breit und $33\frac{1}{3}$ m lang. Sie kostet 15,90 €. Was kostet 1 m² davon?
- Vorhangstoff wurde im Schlussverkauf quadratemeterweise verkauft zum Preis von 9,80 €. Der Stoff lag 1,20 m breit. Was kosten 4 m davon?
- Der Boden des Zimmers 5,75 x 4,25 m soll mit Teppichfliesen ausgelegt werden. Wie viel Fliesen 25 x 25 cm muss man kaufen; was kostet es, wenn der m² auf 22,- € kommt?

Gleichungen:

- $(16x + 4) - (2x + 8) = (13x + 37) - (5x + 5)$
- $(23x + 17) - (14x + 9) = (12x + 57) - (6x + 7)$
- $(34x + 29) - (15x + 38) = (39x + 78) - (28x + 15)$
- $(97x + 58) - (73x + 75) = (48x + 83) - (31x + 16)$
- $(89x + 62) - (53x + 87) = (67x + 58) - (43x + 47)$
- $(93x + 87) - (69x + 63) = (75x + 94) - (59x + 22)$

D Nur Minuszeichen

Tipp: Löse Klammern auf und ordne neu.

Beispiel: $774 - (125 - 26) = 774 - 125 + 26 = (774 + 26) - 125 = 800 - 125 = 675$

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $588 - (117 - 12)$ | 2. $576 - (105 - 24)$ | 3. $683 - (121 - 17)$ |
| 4. $9x - (5x - 4y)$ | 5. $8x - (6x - 3y)$ | 6. $7a - (3b - 2a)$ |
| 7. $114x - (67y - 43x)$ | 8. $573z - (56y - 27z)$ | 9. $268x - (118x - 33y)$ |
| 10. $(8x - 3y) - (4x - 5y)$ | 11. $(9a - 4b) - (5a - 6b)$ | 12. $(7x - 2y) - (4x - 5y)$ |

Gleichungen:

- $(9x - 5) - (4x - 17) = (8x - 5) - (6x - 35)$
- $(17x - 15) - (3x - 39) = (27x - 2) - (15x - 74)$
- $(39x - 27) - (25x - 48) = (34x - 17) - (23x - 62)$
- $(51x - 37) - (26x - 14) = (47x - 17) - (28x - 48)$
- $(97x - 45) - (43x - 37) = (85x - 31) - (67x - 95)$
- $(86x - 73) - (58x - 84) = (73x - 16) - (84x - 66)$

E Komplexere Terme

Nochmal: Terme sind Rechenausdrücke mit Vorzeichen, auch mit Klammern.

Bedenke: Achte auf die Rechen- und Vorzeichen beim Klammernauflösen, sortiere alphabetisch. Positive Klammern kann man weglassen, wenn kein Faktor davor steht.

- $47a + (3a + 5b + 19c) + (8a + 16b + 17c) - 19c$
- $91x - (4x + 8y - 19z) - (13x - 16y + 12z) - (3x + 4y)$
- $(48a + 49b) - (13a - 17b) - (14a + 12b) - (3a - 4b)$
- $(60x + 18y) + (19x - 37y) - (47x - y) - (2x + 14y)$
- $(73a - 14b) - (13a + 18b) - (14a - 17b) + (4a - 18b)$
- $(a + 2b + 3c) + (a - 3b - 2c) + (a - 5b + 6c)$
- $(5x + 4y + 3z) - (4x - 3y + 2z) + (8x - 9y - z)$
- $(19a + 5b + 3c) - (7a - 4b + c) - (2a + 8b - 7c)$
- $(16x - 14y + z) + (8x - 3y - 4z) - (15x - 14y - 13z)$
- $(29a - 14b + 13c) - (8a - 7b - 5c) + (6a + 8b + 9c)$
- $(3a - 2b - c) + (a - 3b - 2c) - (a - 5b - 3c)$
- $(46x + y - 2z) - (19x - 3y + 4z) + (8x - 4y - 6z)$
- $(125x - 45y + 84z) - (139x - 24y - 18z) - (100z - 14x + 25y)$
- $(19c + 28a - 34b) - (18a - 14b + 29c) - (12a + 3b) + (10c - 45a)$
- $(38x - 456z + 317y) - (562y + 972x - 560z) - (400z - 270x) + (19x - y - z)$

F Komplexere Gleichungen

Bedenke: Mache immer eine nach Seiten unabhängige Probe!

1. $15x - (3x + 8) + (4x - 7) = 10x - (3x - 30)$
2. $16x + (3x - 7) - (12x - 19) = 9x - (4x - 38)$
3. $(12x - 8) - (3x - 9) = (10x + 27) - (4x + 2)$
4. $(24x + 13) + (3x - 28) = (17x + 12) - (4x - 1)$
5. $(33x - 25) - (17x - 19) = (19x - 17) - (7x - 31)$
6. $45x - (23x - 15) + 8 = (17x - 9) + 3x - (x - 74)$
7. $(24x - 18) - (6x + 12) = (15x + 48) - (6 + 5x)$
8. $(20x + 30) - (6x + 12) = (13x - 13) - (3x - 35)$
9. $(35x + 85) - (13x - 17) = 19x - (48 + 2x) + 195$
10. $48x - (19x - 7) + (3x - 18) = 27x + 60 - (2x - 6)$
11. $(26x - 17) - (5x - 28) = (9x + 72) - (13 - 4x)$
12. $(45x + 50) - (13x + 26) = 20x - (4x - 17) + 55$
13. $(19x - 3) + (12x + 7) = 30x + (8 - 2x) + 17$

21. Zwei Araber wetten, dass der, dessen Kamel bei einem Wettritt als letzter am Brunnen ankommt, vom Verlierer ein Goldstück bekommt; jeder lässt sein Kamel stehen und lagert sich daneben. Ein vorbeikommender Derwisch hört von der merkwürdigen Wette und flüstert jedem etwas ins Ohr. Da springen sie auf die Kamele und jagen und peitschen sie zum Ziel. Was hat der Derwisch ihnen gesagt?
22. Drei Personen sollen 21 Fässer mit Saft teilen, 7 Fässer sind voll Saft, 7 sind halbvoll und 7 sind leer. Alle drei wollen gleich viel Saft und gleichviel Fässer haben. Es fehlte jede Vorrichtung zum Umfüllen. Wie helfen sie sich?
23. Denksportaufgabe für die Jungen:
Ein Scheich hält eine feindliche *Prinzessin* gefangen, der Prinz, sein Sohn, liebt sie aber. Nun gibt ihm der Vater 8 Kugeln, von denen eine etwas leichter ist. Der Prinz soll durch zweimaliges Wiegen die leichtere herausfinden. Gelingt es ihm nicht, wird die Prinzessin in die Sklaverei verkauft.
24. Und eine Denkaufgabe für die Mädchen:
Ein Emir hält einen aufrührerischen *Prinzen* gefangen. Seine Tochter aber liebt ihn und bittet um sein Leben. Der Emir verspricht ihr, dass sie ihn selbst befreien kann, wenn sie am nächsten Tage vor dem ganzen Hof aus einem verdeckten Gefäß, in das er eine weiße und eine schwarze Kugel legen will, die weiße Kugel herausholt. Von einem redlichen Diener aber erfährt sie, dass ihr Vater zwei schwarze Kugeln in das Gefäß legen will. Wie kann sie dennoch den Prinzen befreien, ohne ihren Vater des Betruges zu überführen?

11. Felix holt 170 Briefmarken für 157,90 €, und zwar doppelt so viel zu 112 €-Cent wie zu 153 €-Cent und den Rest zu 56 €-Cent. Wie viel kaufte er von jeder Sorte?
12. Ein Vater hat Haselnüsse gepflückt und in seine beiden Rocktaschen verteilt. Darauf sagte er zu seinem Sohn: "Ich habe in der rechten Tasche dreimal so viel Nüsse wie in der linken. Nehme ich aber 30 Nüsse von der rechten Tasche in die linke, so befinden sich in der linken Tasche dreimal so viel wie in der rechten." Wie viele Nüsse hatte er ursprünglich in jeder Tasche?
13. Jonas ist ein Spaßvogel und gibt seinem Freund als Rätsel auf: Ich habe zu Hause Mäuschen und Vögel, zusammen haben sie 34 Köpfe und 114 Füße. Wie viel hat er von jeder Tierart?
14. Hans und Grete gehen zum Gemüsehändler und verlangen zwei Kilogramm und ein Kilogramm Kartoffeln. Der Händler hat aber nur zwei Gewichte, und zwar eines zu drei und eines zu fünf Kilogramm. Er hat es damit geschafft, die gewünschten Kartoffeln richtig abzuwiegen. Überlegt nun einmal, wie er es gemacht hat.
15. Zur Zeit der Goldwährung stellte ein König fest, dass einer von seinen 20 Münzmeistern die Münzen regelmäßig mit 1 g Fehlgewicht prägte. Dem Falschmünzer war aber nicht beizukommen. Da rief der Herrscher eines Tages alle zusammen, ein jeder von ihnen mit einem Sack neuangefertigter Münzen aus eigener Werkstatt. Er hieß jeden, aus seinem Vorrat eine bestimmte Anzahl Münzen auf die Waage zu legen. Nun gelang es dem Herrscher, mit einer einzigen Wägung den Falschmünzer zu entlarven.
16. Jemand behauptet, ein geliehenes Buch sei wertlos, weil das Blatt mit den Seiten 144 und 145 herausgerissen worden sei. Ohne das Buch zu prüfen, wurde die Angabe bestritten. Warum?
17. Vor Dir, sagte Opa zu Fritzchen, liegen weniger als 120 Haselnüsse. Zählst Du sie zu jeweils zwei, drei, vier oder sechs Stück ab, bleibt keine Haselnuss übrig. Wenn Du aber immer fünf oder immer sieben Stück nacheinander wegnimmst, bleiben zwei Nüsse zum Schluss liegen. Ich schenke Dir die Nüsse, wenn Du mir jetzt ohne Nachzählen sagen kannst, wie viele es sind.
18. Zwei römische Händler kaufen für ihr Betriebskapital von 100 Solidi Schweine ein, und zwar 5 Schweine für 2 Solidi, also 250 Schweine. 10 Tiere stellen sie in ihren Stall. Die restlichen 240 teilen sie in zwei gleich große Herden ein, in der einen alle mageren Schweine, in der anderen alle fetten. Jetzt verkaufen sie auf dem Markt:
3 magere für 1 Solidus 2 fette für 1 Solidus 5 Schweine für 2 Solidi
 Sie werden ausgelacht, weil sie ohne Verdienst verkaufen. Aber nach Verkauf der 240 Schweine zeigt sich, dass sie 100 Solidi eingenommen haben, d.h. die 10 Schweine ihr Verdienst sind. Wie ist das möglich?
19. In einer großen Milchsüssel sind 8l Milch. Es sollen daraus 4l entnommen werden, doch fehlt das Messgefäß. Es stehen jedoch 3 Milchkannen von 8l, 5l und 3l zur Verfügung. Wie kann man damit durch mehrfaches Umfüllen erreichen, dass schließlich in einer Kanne 4l sind?
20. Ein Araber hinterlässt 13 Kamele. Der älteste Sohn soll die Hälfte, der zweite ein Drittel und der jüngste ein Viertel der Kamele erhalten. Wie können sie die Herde teilen, ohne ein Kamel zu töten?

Multiplikation von Termen und Klammern - Gleichungen

A Multiplikation ganzer und algebraischer Zahlen

Bedenke: Bei der Multiplikation „normaler“ Zahlen muss der Malpunkt immer geschrieben werden. Zwischen Zahlen und Buchstaben kann der Malpunkt wegfällen. Zwischen Zahlen und Klammern ebenso, auch zwischen zwei Klammern fällt er weg.

Und: Bei algebraischen Zahlen sortiere: Zahl mal Zahl, Buchstabe mal Buchstabe. Wichtig: Vorzeichen (VZ) zählen bzw. die Anzahl ihrer Striche und: Kein VZ heißt plus!

Und weiter: Ein Term kann natürlich auch Faktoren enthalten.

Beispiele: $6a \cdot 3b \cdot 5c = 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot abc = 90abc$ *Vergleiche Aufgaben 25 und 28.*
 $(+9x) \cdot (-8y) = 9x \cdot (-8y) = -(9 \cdot 8)xy = -72xy$

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1. $25 \cdot 3 \cdot 4$ | 2. $25 \cdot 3 \cdot 10$ | 3. $75 \cdot 7 \cdot 2$ |
| 4. $39 \cdot 300$ | 5. $65 \cdot 2000$ | 6. $125 \cdot 5 \cdot 8$ |
| 7. $3a \cdot 7b$ | 8. $5a \cdot 6b$ | 9. $9a \cdot 5b$ |
| 10. $18a \cdot 7b$ | 11. $2 \cdot 3a \cdot b$ | 12. $4 \cdot 3a \cdot 2b$ |
| 13. $6a \cdot 2 \cdot b$ | 14. $6 \cdot 3 \cdot 5x$ | 15. $8 \cdot 3 \cdot a \cdot b$ |
| 16. $5a \cdot 7 \cdot 6$ | 17. $3x \cdot 5 \cdot y$ | 18. $6 \cdot x \cdot 4 \cdot y$ |
| 19. $3 \cdot 4 \cdot x \cdot y$ | 20. $24 \cdot 2x \cdot 3y$ | 21. $15 \cdot 2 \cdot x \cdot 2y$ |
| 22. $8x \cdot 5 \cdot 3y$ | 23. $12x \cdot 4y \cdot 3z \cdot 5$ | 24. $8z \cdot 4 \cdot y \cdot 12x \cdot 15$ |
| 25. $(+6a) \cdot (-5b)$ | 26. $(-3x) \cdot (-4y)$ | 27. $(+5x) \cdot (-3y)$ |
| 28. $(6a)(-5b)$ | 29. $(+4c)(-6b)$ | 30. $(-8x)(3y)$ |
| 31. $(-12a)(-11b)$ | 32. $9(-12a)$ | 33. $(-8)(-13b)$ |
| 34. $(-2a)(-3b)(-2c)$ | 35. $(-5r)(4s)(-3t)$ | 36. $(4p)(-2q)(5s)$ |
| 37. $(-2c)(3a)(-4d)(5b)$ | 38. $(5x)(-3y)(-6z)(4w)$ | 39. $(-2a)(3b)(-2c)(-d)$ |
| 40. $(-b)(-3c)(2a)(-5d)$ | 41. $(-a)(-2d)(-c)(-4b)$ | 42. $(-3a)(12b)(-d)(-2c)$ |

B Terme mit Faktoren und komplexen Klammersausdrücken, positive Rechenzeichen

Bedenke: Der Faktor links vor der Klammer wird mit jedem Glied in der Klammer multipliziert!

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. $5(8a+3b)+3(4a+8b)$ | 2. $6(7x+8y)+4(3x+7y)$ |
| 3. $6(15a+12b)+7(4a+9b)$ | 4. $12(3x+5y)+8(7x+13y)$ |
| 5. $9(5x+7y)+8(4x+8y)$ | 6. $17(2x+3y)+15(9x+7y)$ |
| 7. $4(5a+6b+7c)+3(8a+9b+c)+6(4a+3b+7c)$ | |
| 8. $6(9a+5b+8c)+7(6a+5b+9c)+9(7a+8b+12c)$ | |
| 9. $12(4b+3c+5a)+14(12c+8a+9b)+10(8a+12c+9b)$ | |
| 10. $11(20a+30b+45c)+12(12b+8c+3a)+13(2c+5b+7a)+14(b+2a+12c)$ | |

Gleichungen

11. $3(4x+8)+2(5x+3)=2(3x+10)+3(3x+15)$
12. $5(6x+4)+7(4x+2)=6(4x+8)+3(2x+42)$
13. $7(8x+3)+9(3x+2)=8(9x+13)+2(3x+15)$
14. $9(12x+7)+6(8x+7)=11(8x+9)+6(10x+9)$

C Terme mit Faktoren und komplexen Klammersausdrücken,
negative Rechenzeichen

Bedenke: Das negative Rechenzeichen wirkt sich auf die gesamte nachfolgende Klammer aus!
Punkt- vor Strichrechnung!

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $4(5a + 3b) - 3(4a + 8b)$ | 2. $6(14a + 7b) - 9(7a + 9b)$ |
| 3. $8(12a + 5b) - 4(9a + 8b)$ | 4. $9(11a + 8b) - 3(7a + 11b)$ |
| 5. $6(13a + 15b) - 4(9a + 7b)$ | 6. $8(13a + 4b) - 9(7a + 3b)$ |
| 7. $15(8x + 5y + 3z) - 8(2x + 3y + 5z) - 6(3x + 12y + 11z)$ | |
| 8. $12(9x + 8y + 5z) - 4(8x + 5y + 7z) - 9(2x + 11y + 15z)$ | |

Gleichungen

9. $12(8x + 3) - 9(9x + 8) = 11(7x + 12) - 8(9x + 1)$
 10. $13(7x + 4) - 12(6x + 7) = 11(8x + 9) - 10(7x + 8)$
 11. $15(9x + 6) - 14(8x + 9) = 13(10x + 9) - 12(9x + 8)$
 12. $17(8x + 5) - 15(2x + 8) = 13(4x + 7) - 12(3x + 3)$

D Negative Rechenzeichen in der Klammer

1. $5(3x - 5y) + 3(5x - 3y) + 8(6x - 4y)$
 2. $8(6x - 3y) + 12(4x - 7y) + 15(2x - 6y)$
 3. $9(11x - 12y) + 8(15x - 3y) + 12(4x - 7y)$
 4. $8(13x - 4y) + 12(6x - 9y) + 15(3x - 6y)$
 5. $13(2x - 5y) + 12(3x - 4y) + 9(4x - 8y)$

Gleichungen

6. $5(3x - 9) + 4(2x - 5) = 6(2x - 3) + 3(3x - 5)$
 7. $7(5x - 8) + 5(3x - 4) = 6(6x - 4) + 3(2x - 4)$
 8. $11(7x - 8) + 3(5x - 9) = 7(9x - 4) + 4(6x - 3)$
 9. $13(5x - 7) + 12(3x - 8) = 11(6x - 4) + 9(3x - 7)$

E Minuszeichen in und zwischen den Klammern und Anordnungen

Bedenke: Das negative Rechenzeichen wirkt sich auf die gesamte nachfolgende Klammer aus!
Vorsicht: Das zweite Glied in der 2. Klammer wird dann positiv.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $5(3a - 2b) - 4(2a - 4b)$ | 2. $8(9a - 6b) - 5(8a - 7b)$ |
| 3. $12(8a - 9b) - 13(4a - 5b)$ | 4. $6(7a - 8b) - 5(4a - 9b)$ |
| 5. $9(6a - 5b) - 8(5a - 8b)$ | 6. $13(8a - 7b) - 11(9a - 4b)$ |
| 7. $4(8a - 5b) - 3(7a - 6b)$ | 8. $5(12a - 9b) - 4(11a - 3b)$ |

Scherze, Denksportaufgaben

1. Eine Schnecke kriecht an einer 20 Fuß hohen Wand so hinauf, dass sie jeden Tag 2 Fuß zurücklegt, jede Nacht aber 1 Fuß zurückgleitet. Nach wie viel Tagen wird sie oben angekommen sein?
2. Ein Bettler erbettelte an einem Tag soviel Pfennige, wie er hatte, und kaufte sich abends für 5 Pf. Brot. Am folgenden Tag erbettelte er wieder soviel Pfennige dazu, als er noch hatte, und kaufte sich abends für 6 Pf. Brot. Am dritten Tage erbettelte er wieder soviel Pfennige, als er vom Vortage noch besaß, und kaufte sich für 8 Pfennige Brot. Damit hatte er sein Geld ausgegeben. Wie viel besaß er anfangs?
3. Ein Araber kommt am Abend zu zwei Beduinen und bittet sie um Speise. Der eine nimmt aus seinem Beutel 5, der andere 3 Brote. Sie verzehren die 8 Brote gemeinschaftlich. Am Morgen gibt der Araber den beiden Beduinen 8 Goldstücke, die sie sich teilen sollen. Der erste verlangt, da er 5 Brote gab, 5 Goldstücke, der zweite verlangt, dass man brüderlich teile und jedem die Hälfte überlasse. Da sie sich nicht einigen können, rufen sie den Spruch des Richters an. Wie hat er zu entscheiden?
4. a) Eine Bauersfrau brachte Eier in die Stadt. Sie verkaufte zuerst die Hälfte, dann $\frac{1}{3}$ von dem Reste und dann $\frac{1}{2}$ des letzten Restes. Jetzt blieben ihr noch 16 Stück. Wie viel Eier hatte sie zum Markte gebracht?
 b) Ein anderes Mal setzte sie beim ersten Kunden die Hälfte aller Eier und ein halbes Ei ab. Dem zweiten Kunden verkauft sie die Hälfte des verbliebenen Restes und ein halbes Ei. Und beim dritten Kunden wird sie die Hälfte des jetzt noch verbliebenen Restes und ein halbes Ei los, immer ohne ein Ei zu zerbrechen. Drei Eier bleiben ihr nun noch übrig. Mit wie viel Eiern kam die Frau in die Stadt?
5. Ein Landwirt hat 144 Hühner und Gänse. Die Preise für ein Huhn und eine Gans verhalten sich wie 1:5. Wie viele Tiere von jeder Art besitzt er, wenn die Hühner und Gänse gleichviel wert sind?
6. Ein Kaufmann bekam 1 Kiste Zitronen. Er verkaufte den vierten Teil und 4 Stück, von dem Reste den vierten Teil und 4 Stück, von dem Reste die Hälfte und 7 Stück und von diesem Reste die Hälfte und 5 Stück. Es blieben 10 Stück übrig. Wie viel Zitronen waren ursprünglich in der Kiste?
7. Zu einem Knaben, der Schafe hütete, sagte ein anderer scherzhaft: "Gib mir die Hälfte Deiner 100 Schafe." Der Angeredete erwiderte: "Hätte ich doppelt so viele Schafe und halbmal so viele und ein Viertel mal so viele Schafe, wie ich habe, und Dich noch dazu, so wären es erst 100 Schafe."
8. Ein großer Fisch von 84 kg wird so in 3 Teile geteilt, dass das Kopfende 10 kg, der Rumpf dreimal so viel wie Kopf- und Schwanzende zusammen wiegen. Was wiegt jedes Teil?
9. Eine Gruppe Sportler bildet zu dritt aufgestellt 30 Reihen mehr, als wenn sie zu fünft antreten. Wie viele sind es?
10. Ein Großhändler kauft bei einem Bauern 240 Bio-Eier für 32,80 €. Eine Sorte kostet 13 €-Cent, die andere 15 €-Cent das Stück. Wie viel kaufte er von jeder Sorte?

Aus alten Rechenbüchern

- In einem arithmetischen Epigramm (1340 n.Chr.) wird die Berechnung der Zahl der Schüler des Pythagoras (550 v.Chr.) aufgegeben. Es heißt: die Hälfte treibt Mathematik, ein Viertel Naturwissenschaften, ein Siebtel übt sich im Schweigen, dazu kommen noch 3 Frauen.
- Aus der Coss (Algebra) von Rudolff: In einer Ebene stehen 60 m von einander entfernt 2 Türme, der eine ist 50 m, der andere 40 m hoch. Zwischen den beiden Türmen ist ein Brunnen, der gleich weit von den Spitzen der beiden Türme entfernt ist. Es ist festzustellen, wie weit der Brunnen von den beiden Türmen entfernt ist.
- Demokrit (400 v.Chr.) ließ sein Alter errechnen: $\frac{1}{6}$ verbrachte er als Knabe, $\frac{1}{5}$ als Jüngling, die Hälfte im Mannesalter und 12 Jahre als Greis. Wie alt war er?
- Eine alte chinesische Aufgabe heißt: In einem Stalle sind Fasanen und Kaninchen. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wie viel Fasanen und Kaninchen sind es?
- Aus einem alten chinesischen Rechenbuch (2600 v.Chr.): Ein 10 Fuß hoher Bambus ist so umgeknickt, dass seine Spitze den Boden, 3 Fuß entfernt von seinem unteren Ende, berührt. In welcher Höhe befindet sich der Knick?
- Aus Indien (1200 n.Chr.) kommt folgende Aufgabe: Eines Tages riss einer Prinzessin eine Perlenschnur: $\frac{1}{6}$ fiel zu Boden, $\frac{1}{5}$ blieb auf dem Lager liegen, $\frac{1}{3}$ hob eine Dienerin auf, $\frac{1}{10}$ ging verloren, 6 Perlen blieben auf der Schnur. Wie groß war die Zahl der Perlen?
- Adam Riese schrieb folgende Aufgaben:
 - Item 3 Gesellen haben gewonnen eine Anzahl Geldes, der erste nimmt $\frac{1}{7}$, der andere $\frac{1}{4}$ und der dritte nimmt das übrige, das ist 17 fl (Gulden). Nun frage wieviel des Geldes ist, das sie gewonnen haben.
 - Einer dingt einen Arbeiter 30 Tage, wenn er arbeitet so gibt er ihm 7 Pfennig, wenn er aber feiert so rechnet er ihm ab 5 Pfennig, nach Ausganck der 30 Tage hat er soviel gefeiert, als er mit Arbeiten gewonnen, wieviel Tage hat er gearbeitet?
- Ein Schilfrohr, das 5 Fuß vom Ufer eines Teiches entfernt ist, ragt 1 Fuß über das Wasser empor. Zieht man seine Spitze an das Ufer, so reicht es gerade bis an die Wasseroberfläche. Wie tief ist der Teich?
- In einer alten indischen Arithmetik steht folgende Aufgabe: Von einer Anzahl Bienen fliegt $\frac{1}{5}$ auf eine Kadambablüte und $\frac{1}{3}$ auf eine Silindablüte. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen ließ sich auf den Blüten einer Kutapa nieder, eine einzige Biene blieb übrig. Sage mir die Anzahl der Bienen.
- Aus der Algebra von Rudolff: Ein Waidmann hetzt einen Fuchs, hat der Fuchs 60 Sprünge bevor, und als oft der Fuchs thut 9 Sprünge so oft der Hund 6 Sprünge, aber doch thun 3 Hundsprünge so viel als 7 Fuchssprünge. Ist die Frage: wieviel der Hund muss Sprünge thun, bis er den Fuchs erhascht?

Gleichungen

- $5(9x - 4) - 4(7x - 9) = 4(7x - 3) - 5(4x - 11)$
- $9(8x - 5) - 8(7x - 9) = 7(9x - 2) - 5(10x - 10)$
- $8(6x - 7) - 7(5x - 6) = 9(7x - 7) - 7(8x - 13)$

F Mehrgliedrige Terme und komplexere Gleichungen

- $2(3x + 2y - 4z) + 4(5x - 4y + 3z)$
- $8(4x - 5y - z) - 2(3x + 5y - 6z)$
- $4(12x - 9y - 5z) + 5(11x + 3y - 4z)$
- $7(8x - 4y + 7z) - 4(7x - 3y - 4z)$
- $6(9x - 3y + 7z) - 4(9x - 4y + 5z)$
- $12(8x - 10y + 6z) - 14(6x - 5y - 7z)$

Gemischte Gleichungen

- $5(4x + 6) - 3(6x + 2) = 5(6x + 6) - 6(5x - 2)$
- $6(3x + 5) - (15x - 6) = 8(5x + 4) - 3(13x - 16)$
- $7(5x + 11) - 2(3x + 8) = 6(4x - 9) + 4(x + 41)$
- $(4x + 3) + (7x - 4) = (12x + 13) - (9x - 2)$
- $3(5 + 6x) - (11x + 9) = 44 - (3x + 6) + 6x$
- $5(9x - 8) - 4(9x + 17) = 4(x - 5) + (x - 8)$
- $89 + 3(16x - 7) - 5(4x - 2) = 170 - 4(7x + 9)$
- $8(4x - 5) - 4(4x + 16) = 5(3x - 2) - 2(x + 8)$
- $7(8x - 9) + 4(3x + 4) = 6(6x + 14) - 3(25 - 6x)$
- $(4x + 3) + (2x + 5) = (x + 6) + (2x + 8)$
- $(8x - 3) + (6x - 5) = (2x + 7) + (5x + 6)$
- $15x - (8x + 5) + (3x - 9) = 65 - (4x + 9)$
- $(12x - 7) - (8x - 5) = (15x + 8) - (13x - 6)$
- $5(4x + 2) + 3(3x + 2) = 6(4x + 11)$
- $4(4x + 2) - 2(2x + 3) = 4(x + 5) - 2(x + 4)$
- $4(5x - 7) + 3(3x - 2) = 5(5x - 2) + 3(x - 7)$
- $5(4x + 6) + 3(4x - 7) = 3(3x + 8) + 2(5x - 1)$
- $5(5x + 4) - 3(4x + 4) = 6(2x + 3) - (x + 2)$
- $5(3x + 4) + 3(4x + 3) = 4(3x + 16) + 10$
- $7(6x + 1) - 4(5x + 2) = 7(4x + 5) - 4(2x + 3)$
- $3(15x - 11) + 6(3x - 4) = 8(5x - 1) + 2(4x - 2)$
- $3(4x - 7) + 3(5x - 2) = 2(3x - 4) + 2(8x - 2)$
- $5(6x + 5) - 3(2x + 4) = 8(x + 9) - 3(x + 7)$
- $(35x - 7) - (8x + 19) - (16x + 4) = 35 - (x + 29)$
- $(6x + 22) - (3x + 4) + (8x - 17) = 76 - (3x + 19)$

Potenzrechnung, Termberechnung, Gleichungen

Jetzt werden im Gegensatz zu den Aufgaben weiter vorne auch Buchstaben mit Buchstaben multipliziert. Das sieht zwar abstrakt aus, ist aber nicht schwerer als das Rechnen mit Zahlen. Eigentlich ist es sogar leichter, denn man kann hierbei erst einmal nichts direkt konkret ausrechnen. Es wird jetzt oft nur umgeformt.

- Ein reicher orientalischer Kaufmann wollte einst einem Nomaden sein edelstes Pferd abkaufen. Nach längerem Handeln sagte schließlich der Nomade: „Mein Pferd hat vier Beine, an jedem einen Huf, an jedem Huf ein Eisen. Jedes Eisen ist mit acht Nägeln befestigt. Insgesamt sind es also 32 Nägel. Wollt Ihr mir für den ersten Nagel ein Haferkorn, für den zweiten zwei, für den dritten vier, für den vierten acht Körner usw. geben, also für jeden Nagel die doppelte Körnerzahl vom vorhergehenden? Dann sollt Ihr das Pferd haben.“
“Ei, das ist ein guter Handel!“ dachte der Kaufmann und schlug in die Hand des Nomaden ein. Doch beim Zählen verging ihm das Lachen.
Warum?
Denn wieviel Körner kostet das Pferd?
Welches Gewicht haben sie, wenn 1000 Körner rund 35g wiegen?

Alternative für Computerfreunde: Wie viel sind genau vier Gigabyte minus 1?
Was ist anders im Vergleich zu obiger Aufgabe?

A Potenzen – Einführungsbeispiele

Bedenke: Der Malpunkt zwischen Faktoren kann entfallen, wenn Missverständnisse unwahrscheinlich sind und gleiche Faktoren werden als Potenzen geschrieben:
 $bc \cdot c = b \cdot c \cdot c = bcc = bc^2$

- | | | |
|-----------------------------|--|---------------------------------|
| 2. $a \cdot a$ | 3. $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ | 4. $x + x$ |
| 5. $x \cdot x$ | 6. $x^2 \cdot x^2$ | 7. $x^2 + x^2$ |
| 8. $x \cdot x^2$ | 9. $x + x^3$ | 10. $x^2 \cdot x^3$ |
| 11. $x^3 \cdot x^3$ | 12. $x^3 + x^3$ | 13. $ab \cdot a$ |
| 14. $ab \cdot b$ | 15. $ab + b$ | 16. $ab \cdot a^2$ |
| 17. $2ab \cdot a^2$ | 18. $4a^2b \cdot a$ | 19. $4ab \cdot 3ab$ |
| 20. $4ab \cdot 3a \cdot 2b$ | 21. $4a^2 \cdot 2ab \cdot b$ | 22. $5a^2b \cdot 3ab^2 \cdot 5$ |
| 23. $6a \cdot 3b \cdot 2ab$ | 24. $5a \cdot 6ab^2 \cdot 7a$ | |

Bedenke: Der Faktor vor der Klammer muss mit jedem Glied in der Klammer malgenommen werden!

- $2x(6x + 3) + 4x(5x + 2) = 4x(8x + 2) + 2(x + 16)$
- $3x(5x + 6) + 2x(5x + 4) = 5x(5x + 3) + 2(2x + 28)$
- $5x(6x + 3) + 3x(4x + 4) = 6x(7x + 3) + 3(2x + 13)$
- $6x(4x + 5) - 3x(5x - 2) = 3x(3x + 5) + 3(x + 36)$
- $7x(5x + 8) - 4x(2x + 3) = 9x(3x + 4) + 3(x + 15)$
- $8x(6x - 3) - 5x(4x - 7) = 4x(7x - 2) + 7(x + 12)$
- $7x(8x - 2) + 8x(3x - 1) = 2x(40x - 12) - 2(x - 8)$
- $3x(9x + 5) + x(4x - 2) = x(31x + 7) - (x - 21)$

Füll- und Arbeitsaufgaben

- Ein Dorfbrunnen braucht, wenn er leer ist, 7 Stunden zum Vollaufen und läuft in 3 Stunden aus. Wie lange dauert das Auslaufen des vollen Brunnens, wenn Zu- und Abflussrohr gleichzeitig geöffnet sind?
- Ein Ölvorrat reicht, wenn ein Ofen brennt, 24 Tage. Bei einem anderen Ofen reicht derselbe Vorrat 30 Tage. Wie lange reicht das Öl, wenn beide Öfen gleichzeitig brennen?
- Ein Wassertank läuft in 2 Stunden voll und reicht dann 12 Stunden. Wie lange dauert das Füllen des Tanks, wenn während des Füllens auch der Auslaufhahn geöffnet ist?
- Das Füllen eines Tanks dauert mit einer Pumpe 5 Stunden, mit einer zweiten Pumpe 7 1/2 Stunden. Wie lange dauert das Füllen des Tanks, wenn beide Pumpen gleichzeitig benutzt werden?
- Ein Mühlenteich hat zwei Zuflüsse. Durch den ersten Zufluss wird er in 12 Stunden, durch den zweiten in 15 Stunden gefüllt. Durch den Abfluss wird der Teich in 9 Stunden geleert.
 - Wann ist der volle Teich geleert, 1. wenn der Zufluss I und der Abfluss, 2. wenn der Zufluss II und der Abfluss geöffnet sind?
 - Wann ist der leere Teich gefüllt, wenn 1. beide Zuflüsse, 2. beide Zuflüsse und der Abfluss geöffnet sind?
- Ein Benzintank wird durch 2 Leitungen in 42 bzw. 28 Minuten gefüllt. Wie lange dauert die Füllung, wenn beide Leitungen geöffnet sind?
- Ein Öltank wird durch 2 Zuleitungen in 6 bzw. 8 Tagen gefüllt und durch 2 Ableitungen in 16 bzw. 24 Tagen geleert. Wie lange dauert die Füllung, wenn alle Leitungen geöffnet sind?
- Ein Klärteich kann durch 2 Leitungen in 24 bzw. 18 Tagen gefüllt werden. Wie lange dauert die Füllung, wenn beide Leitungen geöffnet sind?
- Ein Behälter wird durch 3 Zuleitungen in 15 bzw. 20 bzw. 30 Stunden gefüllt und durch den Abfluss in 12 Stunden geleert. In welcher Zeit ist der Behälter gefüllt, wenn alle Leitungen geöffnet sind?
- Ein Tiefbauunternehmen soll einen Abflussgraben ausheben. Eine Mannschaft wird es in 12 Tagen, die andere in 20 Tagen schaffen. Da der Auftrag eilt, werden beide eingesetzt. In welcher Zeit ist der Graben fertig?
- Ein Hochwasserauffangbecken kann durch einen Abfluss in 36 Stunden geleert werden. Da die Auffangkapazität erhöht werden soll, wird ein Nebenbecken gebaut, in das das Auffangbecken in 45 Stunden geleert werden kann. In wie viel Stunden ist das volle Becken leer, wenn beide Abflüsse geöffnet sind?
- Auf Teneriffa wird eine Zisterne durch eine Quelle in 40 Stunden gefüllt. Man findet eine stärkere, die den Tank in 30 Stunden füllt.
 - in welcher Zeit wird er durch beide Quellen gefüllt?
 - Wie lange dauert die Füllung der leeren Zisterne, wenn auch der Abfluss (60 Stunden) geöffnet ist?
- Eine Bergwiese muss mit der Hand gemäht werden, der Bauer braucht dafür 5 Tage. Da das Wetter schlecht ist, hilft ihm sein Vater, der alleine 10 Tage mähen müsste. In welcher Zeit schaffen es beide?
- Ein Rübenacker ist zum Jäten und Hacken in 3 gleich große Abschnitte aufgeteilt worden. Jennie brauchte 5 Tage für ihren Teil, Annika 7 Tage. In welcher Zeit schaffen beide Annes Teil, die krank geworden ist?

Ermittlung des Alters

- Ein Großvater ist 72, sein Enkel Paul ist 18 Jahre alt. In wie viel Jahren wird der Großvater dreimal so alt wie der Enkel sein? Vor wie viel Jahren war er fünfmal so alt?
- Vor 5 Jahren war der Vater 5mal so alt wie sein Sohn, in einem Jahr ist er nur noch dreimal so alt. Wie alt sind sie heute?
- Fritz ist um 20 Jahre älter als sein Vetter Karl. In 8 Jahren hat Karl $\frac{3}{7}$ des Alters von Fritz. Bestimme das Alter von Fritz und Karl.
- Eine 30jährige Mutter hat eine 9jährige Tochter. Vor wie viel Jahren war die Mutter viermal so alt wie ihre Tochter?
- Eine Mutter ist siebenmal so alt wie ihre Tochter. In 4 Jahren wird die Mutter viermal so alt wie die Tochter sein. Wie alt sind Mutter und Tochter?
- Ein Vater ist jetzt dreimal so alt wie der Sohn und er wird in 15 Jahren doppelt so alt wie sein Sohn sein. Wie alt sind beide?
- Karl ist 24 Jahre alt. Er ist doppelt so alt wie Fritz war, als Karl so alt war wie Fritz ist. Wie alt ist Fritz?
- Ein Vater war vor 3 Jahren fünfmal so alt wie seine Tochter. In 4 Jahren wird er nur noch dreimal so alt sein. Wie alt sind sie heute?
- Eine Mutter war vor 4 Jahren siebenmal so alt wie ihr Sohn, in 6 Jahren hat er nur noch ein Drittel ihres Alters. Wie alt sind sie heute?
- Eine Tochter zählte vor 5 Jahren ein Drittel der Jahre ihrer Mutter. In 7 Jahren wird sie nur noch halb so alt sein. Wie alt sind beide heute?
- Eine 44jährige Frau ist doppelt so alt wie ihre Tochter. In wie viel Jahren wird sie nur noch $1\frac{1}{2}$ mal so alt sein? Wie alt sind sie dann beide?
- Ein 68jähriger Großvater ist viermal so alt wie seine Enkeltochter. Vor wie viel Jahren war er siebenmal so alt? Wie alt waren beide?
- Eine Urgrossmutter (96 Jahre) ist sechsmal so alt wie ihr Enkelkind. Vor wie viel Jahren war sie
 - siebenmal,
 - neunmal so alt? Wie alt waren beide damals?
- Das Verhältnis des Lebensalters eines Ehepaares betrug bei der Heirat 4:5 und bei der silbernen Hochzeit 9:10. Wie alt waren die Brautleute bei der Heirat?

B Nur positive Rechenzeichen in den Klammern

Bedenke: Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert.

Und: Der Malpunkt zwischen den Klammern kann entfallen!

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1. $(3a+4b)(3x+2y)$ | 2. $(7a+5b)(3x+5y)$ |
| 3. $(a+1)(b+1)$ | 4. $(2x+1)(3y+1)$ |
| 5. $(3x+5y)(4x+2y)$ | 6. $(5a+7b)(8a+2b)$ |
| 7. $(6x+7y)(x+2y)$ | 8. $(4x+3y)(5x+6y)$ |
| 9. $(3a+7b)(8a+5b)$ | 10. $(5a+6b)(6a+4b)$ |

Bedenke: Erst die Klammern ausmultiplizieren!

Und: Bei negativem Rechenzeichen zwischen den Klammerprodukten kann zur Verdeutlichung eine 2. Klammerebene eingeführt werden, die aber nicht geschrieben werden muss. Diese hat dann eckige Form. Eine 3. Klammer wäre üblicherweise geschweift.

- $(x+3)(2x+4) + (x+5)(x+7) = (3x+5)(x+4) + 62$
- $(2x+5)(3x+4) + (3x+2)(x+8) = (3x+4)(3x+6) + 50$
- $(4x+3)(3x+2) + (5x+3)(2x+3) = (11x+3)(2x+2) + 29$
- $(5x+6)(7x+4) + (3x+4)(x+8) = (19x+10)(2x+3) + 39$
- $(6x+2)(3x+5) + 2(5x+7) = (9x+8)(2x+3) + 2(x+10)$
- $(3x+5)(2x+4) - [(2x+1)(3x+2)] = 2(5x+19)$
- $(6x+5)(5x+6) - [(4x+5)(5x+4)] = (5x+3)(2x+2) + 40$
- $(8x+3)(6x+1) - [(9x+2)(5x+1)] = (3x+1)(x+1) + 12$
- $(6x+5)(3x+4) - [(4x+5)(4x+3)] = 5x^2 - 3(x^2 - 11)$
- $(4x+3)(7x+5) - [(6x+4)(3x+3)] = (5x+2)(2x+1) + 41$

C Zweite Klammer mit Minuszeichen

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $(5a+4b)(3x-2y)$ | 2. $(4a+5b)(6x-3y)$ |
| 3. $(8a+7b)(2x-y)$ | 4. $(7a+9b)(4x-4y)$ |
| 5. $(8a+3b)(2a-2b)$ | 6. $(7x+6y)(4x-3y)$ |
- $(3x+4)(x-1) + (4x+5)(2x-1) = (11x+8)(x-1) + 29$
 - $(5x+3)(2x-3) + (3x+4)(3x-1) = x^2 + (6x+3)(3x-6) + 59$
 - $(6x+4)(3x-5) + (2x+1)(4x-5) = (13x+1)(2x-4) + 31$
 - $(7x+2)(5x-1) + (3x+2)(4x-2) = (7x+3)(7x-3) - 2x^2 + 8$
 - $(5x+3)(7x-3) + (6x+9)(3x-2) = (8x+4)(7x-1) - 3x^2$
 - $(5x+8)(3x-5) + (3x+7)(4x-6) = (9x+5)(3x-1) + 4$
 - $(3x+4)(4x-1) - (2x+1)(3x-2) = (3x+2)(2x-3) + 42$
 - $(5x+3)(4x-3) - (2x+6)(2x-1) = (4x+4)(4x-3) - 8$
 - $(7x+6)(5x-4) - (3x+2)(x-1) = (8x+5)(4x-3)$
 - $(x+2)(3x-4) - (x+3)(x-2) = (2x+3)(x-5) + 29$
 - $(3x+5)(2x-3) - (3x+6)(2x-4) = 2(x+5) - 3(x-1)$
 - $(5x+3)(4x-2) - (4x+2)(3x-1) = (4x+6)(2x-4) + 40$

D Erste Klammer mit Minuszeichen

Bedenke: Da ein Produkt kommutativ ist, d.h. die Faktoren dürfen vertauscht werden, kannst du immer die beiden Klammern auch herumdrehen.

1. $(2x - y)(3a + 4b)$
2. $(5x - y)(4a + 5b)$
3. $(2a - 4b)(5x + 3y)$
4. $(6a - 7b)(8x + 9y)$
5. $(3x - y)(4x + 5y)$
6. $(2x - 3y)(4x + 5y)$
7. $(4x - 5)(3x + 6) + (8x - 2)(4x + 3) = (11x - 3)(4x + 2)$
8. $(3x - 4)(5x + 3) + (4x - 3)(6x + 3) = (6x - 6)(8x + 3) - (9x^2 - 10)$
9. $(6x - 5)(3x + 6) + (4x - 5)(5x + 6) = (19x - 10)(2x + 1) - 8$
10. $(7x - 3)(2x + 3) + (6x - 4)(3x + 4) = (16x - 2)(2x + 1) - 8$
11. $(4x - 5)(5x + 4) + (3x - 2)(4x + 7) = (8x - 6)(4x + 3)$
12. $(6x - 3)(4x + 5) + (3x - 4)(6x + 4) = (7x - 3)(6x + 2) + 5$
13. $(3x - 2)(5x + 9) - (2x - 1)(3x + 2) = (3x - 2)(3x + 4) + 12$
14. $(4x - 3)(6x + 8) - (5x - 2)(3x + 4) = (3x - 5)(3x + 3) + 12$
15. $(5x - 2)(4x + 4) - (3x - 4)(4x + 5) = (4x - 3)(2x + 3) + 42$
16. $(6x - 4)(5x + 4) - (3x - 2)(4x + 2) = (6x - 5)(3x + 2) + 16$
17. $(5x - 6)(4x + 5) - (3x - 4)(4x + 5) = (4x - 3)(2x + 1) + 5$
18. $(8x - 5)(3x + 6) - (4x - 3)(5x + 7) = (4x - 1)(x + 2) + 19$

E Beide Klammern mit Minuszeichen

1. $(2x - y)(a - b)$
2. $(2x - 3y)(a - 2b)$
3. $(4x - 2y)(3a - 4b)$
4. $(5x - 6y)(3a - 2b)$
5. $(3x - 2y)(4x - y)$
6. $(5x - 6y)(5x - 7y)$
7. $(8x - 4y)(5x - 3y)$
8. $(4x - 6y)(3x - 6y)$
9. $(5a - 3b)(4a - 7b)$
10. $(10a - 7b)(11a - 3b)$
11. $(3x - 2)(4x - 5) + (4x - 3)(2x - 4) = (5x - 5)(4x - 6) + 12$
12. $(5x - 3)(4x - 2) + (3x - 1)(4x - 2) = (8x - 3)(4x - 3) + 15$
13. $(6x - 2)(5x - 3) + (2x - 3)(3x - 2) = (9x - 3)(4x - 4) + 14$
14. $(5x - 3)(4x - 5) + (6x - 4)(4x - 5) = (11x - 8)(4x - 5) + 11$
15. $(8x - 4)(5x - 6) + (6x - 5)(3x - 2) = (10x - 6)(6x - 7) - 2x^2 + 14$
16. $(11x - 2)(3x - 2) + (9x - 3)(2x - 3) = (17x - 12)(3x - 2) + 7$
17. $(8x - 2)(7x - 5) - (4x - 3)(5x - 4) = (9x - 3)(4x - 2) - 1$
18. $(9x - 3)(4x - 5) - (8x - 2)(3x - 6) = (6x - 2)(2x - 3) + 35$
19. $(11x - 4)(5x - 3) - (13x - 4)(3x - 4) = (4x - 1)(4x - 2) + 40$
20. $(12x - 8)(6x - 7) - (15x - 3)(4x - 5) = (4x - 7)(3x - 9) + 14$
21. $(8x - 4)(7x - 3) - (9x - 6)(8x - 5) = 12 - (8x - 3)(2x - 1)$
22. $(10x - 8)(6x - 4) - (9x - 7)(5x - 3) = (5x - 8)(3x - 6) + 19$

25. Um eine Großstadt hat man für ein Motorrad-Rennen eine in sich geschlossene Bahn von 30 km angegeben.

a) Wann treffen sich zwei Motorrad-Rennfahrer, wenn sie gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen abfahren und ihre Geschwindigkeit 2 km/min und 2 1/2 km/min betragen? Wie groß sind die Wege beider bis zum ersten Treffpunkt?

b) 1 3/4 km/min und 2 1/4 km/min

c) 1 1/2 km/min und 1 5/6 km/min

26. Bei einem Dauerrennen in einem Stadion von 1000 m Bahnlänge überrundet der beste Fahrer, der 25 m/sec fährt, einen, der nur 20 m/sec aushält. Wann findet dies statt?

27. Zwei Orte A und B sind 60 km voneinander entfernt. Morgens um 9 Uhr fährt ein Radfahrer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h von A nach B. Ihm folgt um 11.00 Uhr ein Motorradfahrer mit der Durchschnittsgeschwindigkeit 90 km/h. Wann und wo holt er den Radfahrer ein?

12. Wegen eines Staus kann ein PKW mit Wohnanhänger das letzte Stück bis zur Grenze statt mit 75 km/h nur mit 30 km/h fahren und kommt deswegen 1 Stunde später als geplant an der Grenze an. Wie viel km betrug die Staustrecke?
13. Mark will seinen Freund Stephan mit dem Rad besuchen, der 21 km entfernt wohnt. Er fährt um 8.00 Uhr mit 15 km/h los. Um 9.00 Uhr geht ihm Stephan entgegen, der aber wegen seines jüngeren Bruders, den er mitnehmen muss, nur 3 km/h gehen kann. Wann treffen sie sich, welche Wegstrecke hat jeder zurückgelegt?
14. Nina fährt um 10.00 Uhr mit dem Rad (15 km/h) zu ihrer 20 km entfernt wohnenden Freundin Renate. Diese geht ihr um 10.40 Uhr zu Fuß (5 km/h) entgegen. Wann treffen sie sich; welchen Weg hat jede zurückgelegt?
15. Um 12.00 Uhr stehen die Zeiger übereinander. Wann ist das das nächste mal der Fall?
16. Ein Fuhrmann fährt mit 4 km/h ab. 5 Stunden später folgt ihm ein Reiter mit 20 km/h. Wann und wo holt er das Fuhrwerk ein?
17. Zwei Freunde in A und B (60 km Entfernung) fahren einander entgegen. Der eine fährt 13 km/h, der andere 17 km/h. Wann treffen sie sich? Wie viel ist jeder gefahren?
18. Ein Dampfer fährt mit 12 km/h und fordert 20 km vor dem Hafen ein Lotsenboot (18 km/h) an. Wann treffen sie sich? Welche Strecke ist jedes Schiff gefahren?
19. Ein Wanderer wandert 5 km/h. 4 Stunden später folgt ihm ein Radfahrer mit 15 km/h. Wann und wo holt er den Wanderer ein?
20. Um 10.00 Uhr fährt ein Radfahrer von dem Orte A nach B. 2 Stunden später folgt ihm ein LKW. Der Radfahrer fährt mit einer Stundengeschwindigkeit von 15 km, der LKW mit der fünffachen Geschwindigkeit. Wann und wo holt der LKW den Radfahrer ein?
21. Zwei Freunde, die 24 km voneinander entfernt wohnen, fahren gleichzeitig von zu Hause ab. Der eine fährt mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h, der andere mit 14 km/h. Wann und wo treffen sich die beiden?
22. Ein Motorradfahrer fährt von Freiburg nach Konstanz 1 1/2 Stunden. Auf der Rückfahrt muss er wegen schlechten Wetters langsamer fahren und braucht darum 2 Stunden. Er ist im Durchschnitt 23 km/h langsamer gefahren. Berechne
 - a) die Durchschnittsgeschwindigkeit bei beiden Fahrten und
 - b) die Entfernung Freiburg-Konstanz.
23. Ein Motorboot benötigt für 24 km stromaufwärts dieselbe Zeit wie für 48 km stromabwärts. Der Strom fließt mit 6 km/h. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Bootes?
24. Anderthalb Tage nach der Abfahrt eines Postdampfers (21 sm/Stunde = kn) von New York nach Bremen folgt ein Schnelldampfer (28 sm/h). In wie viel Tagen holt der große Ozeandampfer den kleineren Transport- und Passagierdampfer ein?

F Alle Vor- und Rechenzeichen gemischt

1. $(4x + 5y)(3a + 4b) + (5x + 6y)(4a + 7b)$
2. $(3x - 6y)(3a + 5b) + (6x + 7y)(2a + 3b)$
3. $(4x - 5y)(4x - 6y) - (3x - 4y)(4x + 5y)$
4. $(9x - 4y)(4a + 3b) - (8x - y)(2a + 3b)$
5. $(6x - 3y)(4x + 5y) - (4x - y)(5x - 6y)$
6. $(5x - 3y)(4x - 4y) - (3x - 2y)(5x - 6y)$
7. $(8x - 6y)(4x + 3y) + (2x + 2y)(x - y)$
8. $(9x - 4y)(5x - 3y) - (2x - 3y)(4x + 2y)$
9. $(10x + y)(11x - y) - (3x + 4y)(4x + 3y)$
10. $(15x - 2y)(2x - 4y) + (4x - y)(5x + y)$
11. $(x + 2)(2x + 5) + (x + 2)(x + 6) = (3x + 4)(x + 3) + 14$
12. $(3x + 4)(x - 1) + (5x + 6)(2x - 1) = (13x + 4)(x - 1) + 28$
13. $(3x + 4)(4x + 1) - (2x + 3)(x + 3) = (5x + 2)(2x + 1)$
14. $(3x - 7)(5x - 3) + (x + 3)(3x - 4) = (3x - 8)(6x - 5) + 41$
15. $(4x - 3)(3x + 4) + (2x - 3)(3x + 7) = (9x + 1)(2x + 1)$
16. $(3x - 2)(4x - 1) - (2x - 1)(3x - 2) = (6x - 5)(x - 1) + 2$
17. $4(13x - 4) + (4x - 1)(3x + 1) = (6x + 5)(2x + 3) - 7$
18. $(4x + 5)(3x - 1) + (5x + 4)(2x - 1) = (11x + 1)(2x + 1)$
19. $(7x + 9)(3x - 2) - (5x + 4)(3x - 1) = (3x + 5)(2x - 2)$
20. $(3x + 5)(2x - 3) - (2x + 4)(x - 2) = 16 - (4x + 2)(1 - x)$

Binomische Formeln

Zur Erinnerung: Es gibt drei Binomische Formeln. Sie stellen einen Sonderfall obiger Klammervielfachung dar, bei der die Klammerschritte bis auf die Rechenzeichen gleich sind.

Die drei Formeln werden meist mit den Buchstaben a und b geschrieben:

$$1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad 3) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Alles, was in den folgenden Aufgaben an der Stelle steht, wo sich a befindet, muss mit sich selbst malgenommen werden. Dasselbe gilt für b .

Und: **NIE DAS MITTELGLIED VERGESSEN!!!**
Und weiter: Sortiere beim Quadrieren Zahl mal Zahl, Buchstabe mal Buchstabe.
Und vor allem: Lerne die Formeln auswendig, unbedingt!

A 1. Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. $(x+y)^2$ | 2. $(2x+y)^2$ | 3. $(x+2y)^2$ |
| 4. $(3x+y)^2$ | 5. $(x+3y)^2$ | 6. $(2x+3y)^2$ |
| 7. $(5x+2y)^2$ | 8. $(3x+4y)^2$ | 9. $(5x+6y)^2$ |
| 10. $(4x+6y)^2$ | 11. $(9x+5y)^2$ | 12. $(5x+8y)^2$ |

Bedenke: Zerlege Quadratzahlen günstig in Binome, dann lassen sie sich im Kopf berechnen:

Beispiel: $61^2 = (60+1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 13. 31^2 | 14. 41^2 | 15. 71^2 |
| 16. 32^2 | 17. 52^2 | 18. 92^2 |

Gleichungen mit Binomen

Bemerkung: Nach dem Ausrechnen der Binome haben die quadratischen Glieder die Summe 0. Es bleiben also sogenannte „lineare Gleichungen“ übrig.

19. $(x+4)^2 + (x+3)^2 = (x+5)^2 + (x+1)^2 + 1$
20. $(2x+3)^2 + (x+5)^2 = (2x+4)^2 + (x+2)^2 + 30$
21. $(3x+5)^2 + (4x+6)^2 = (5x+6)^2 + 43$
22. $(4x+7)^2 + (3x+4)^2 = (6x+7)^2 - x(11x+7) + 19$
23. $(8x+2)^2 + (6x+5)^2 = (10x+4)^2 + 49$
24. $(9x+1)^2 + (4x+3)^2 = (10x+2)^2 - 3(x^2 - 10)$
25. $(4x+3)^2 - (2x+3)^2 = (3x+1)^2 + 3x^2 + 17$
26. $(9x+4)^2 - (8x+5)^2 = (4x+3)^2 + (x+1)^2 - 53$
27. $(10x+9)^2 - (8x+7)^2 = (6x+5)^2 + 55$
28. $(11x+8)^2 - (10x+7)^2 = (5x+2)^2 - (2x+1)^2 + 32$
29. $(8x+6)^2 - (6x+3)^2 = (5x+4)^2 + (3x^2 + 31)$
30. $(12x+6)^2 - (10x+4)^2 = (6x+5)^2 + 8x^2 + 15$

Bewegungsaufgaben

1. Fritz macht mit seinem jüngeren Bruder Wettlauf. Er gibt ihm 60 m Vorsprung. Wann und wo holt er ihn ein, wenn er in der Sekunde 4,5 m, sein Bruder 3,7 m zurücklegt?
2. Bei einem 100 m-Lauf wurde die Strecke von Karl in 12 Sekunden, von Ernst in 13 Sekunden zurückgelegt. a) Wie viel Meter war Ernst noch vom Ziel entfernt, als Karl durchs Ziel ging? b) Welche Strecke müsste Karl dem Ernst vorgeben, wenn er in 12 Sekunden, Ernst in 12 1/2 Sekunden, die Laufstrecke zurücklegt und beide gleichzeitig durchs Ziel gehen sollen?
3. Zwei Radfahrer fahren sich von zwei Orten entgegen, die 240 km voneinander entfernt liegen. Der eine fährt um 8 Uhr ab und legt durchschnittlich in 4 Min. 1 km zurück. Der andere beginnt seine Fahrt um 10 Uhr und braucht zu 1 km nur 3 Min. Wann und wo treffen sie sich?
4. Ein Reiter soll einer Wandergruppe, die einen Vorsprung a) von 8 km b) von 1 1/2 Stunden hat, eine Nachricht überbringen. Er legt in 1 Min. 350 m zurück, während die Jugendabteilung in 1 Min. 100 m marschiert. Nach welcher Zeit erreicht er die Gruppe?
5. a) Ein LKW fährt um 13 Uhr mit durchschnittlich 72 km/h von Braunschweig nach Lüneburg (110 km). 10 Minuten später folgt ihm ein PKW mit durchschnittlich 87 km/h. Wann und nach wie viel Kilometern holt er den LKW ein? b) Um 13 Uhr fährt ein Motorradfahrer mit der Durchschnittsgeschwindigkeit 93 km/h von Lüneburg nach Braunschweig. Wann und wo begegnet er den beiden anderen Fahrzeugen? c) Um 12.40 Uhr ist schon ein PKW mit Wohnanhänger in Lüneburg mit durchschnittlich 72 km/h abgefahren. Wo trifft er die aus Braunschweig kommenden Fahrzeuge? d) Wann überholt der Motorradfahrer diesen PKW?
6. Ein LKW fährt um 15.00 Uhr von Marburg mit 60 km/h nach Kassel. 20 Minuten später folgt ihm ein PKW mit 80 km/h. Wann und wo überholt er den LKW?
7. Zwei Freunde brechen zu gleicher Zeit mit ihren Rädern von ihren Heimatorten auf und fahren einander entgegen. Der eine würde für die ganze Strecke 2 Stunden brauchen, der andere, weil es mehr bergauf geht, 3 Stunden. Wann treffen sie sich?
8. Ein Wanderer bricht um 9 Uhr auf, er geht mit 4 km/h. Um 11 Uhr folgt ihm ein Radfahrer mit 14 km/h. Wann und wo holt er den Wanderer ein?
9. Zwei Freunde, die 56 km voneinander entfernt wohnen, fahren einander mit dem Rad entgegen. Der eine fährt 16 km/h, der andere wegen Gegenwindes nur 12 km/h. Wann treffen sie sich? Welche Strecke ist jeder gefahren?
10. Ein Motorradfahrer fährt mit 81 km/h um 11.15 Uhr seinem Freund nach, der um 9.30 Uhr mit dem Rad mit 18 km/h vorausgefahren ist. Wann und wo holt er ihn ein?
11. Maik und Niklas wollen sich um 10.30 Uhr an einem See treffen. Maik muss 18,75 km fahren, er fährt 15 km/h, Niklas (18 km/h) muss aber 24 km fahren. Wann muss jeder abfahren?

14. Vier Freunde teilen sich 1.875,- €, so dass der zweite die Hälfte des ersten, der dritte ein Drittel des ersten und der vierte ein Halb des zweiten erhält. Wie wird der Betrag verteilt?
15. Vier Freunde verloren bei einem Wettspiel ihren ganzen Einsatz. Der erste verlor $\frac{2}{5}$, der zweite $\frac{1}{4}$, der dritte $\frac{2}{15}$ des Einsatzes und der vierte 145,60 €. Wie hoch war der ganze Einsatz? Wie viel haben die drei verloren?
16. In einer Klasse beträgt das Verhältnis der Jungen zu den Mädchen 6:7. Einmal fehlten 2 Jungen, und ein Mädchen brachte eine Freundin mit, da war das Verhältnis 2:3. Wie viel Jungen und Mädchen waren in der Klasse?
17. In einer anderen Klasse beträgt das Verhältnis Jungen zu Mädchen 7:5. Fehlen 4 Jungen, so ist das Verhältnis ausgeglichen.
18. In einer Jugendgruppe sind 3 Mädchen mehr als Jungen. Fehlen 2 Jungen und 1 Mädchen, beträgt das Verhältnis 5:7.
19. Bei einer Volkswanderung wanderten Senioren und Junioren im Verhältnis 6:7 in einer Gruppe. Unterwegs schieden 18 Senioren und 17 Jugendliche aus, das Verhältnis am Ziel betrug dann 5:6. Wie viele waren in jeder Gruppe gestartet?
20. Ein Angestellter gibt von seinem Netto-Einkommen aus: $\frac{1}{3}$ für Miete, $\frac{1}{5}$ für Essen und Genussmittel, $\frac{1}{24}$ für Energie und Wasser, $\frac{2}{15}$ für PKW und Versicherungen, $\frac{1}{16}$ für Telefon, Porti und Zeitschriften, $\frac{1}{30}$ für Kleidung und 611 € für alle übrigen Ausgaben. Berechne das Gehalt und die einzelnen Ausgaben.
21. Bei Familie Meier feiert der Großvater seinen 90. Geburtstag. Fast die ganze Verwandtschaft, insgesamt 89 Personen, ist erschienen, um zu gratulieren. Die Mütter sind alle da; von den Vätern aber können einige nicht kommen und haben Grüße geschickt. Es nehmen an der Feier genau 7 Mütter mehr als Väter teil, 45 Kinder mehr als Mütter und 4 Mädchen mehr als Jungen. Wie viele Mütter, Väter, Mädchen und Jungen nehmen an der Geburtstagsfeier teil?
22. Ein Roulettespieler verliert im Spielkasino zuerst $\frac{1}{4}$ seines Geldes und dann noch 740,- €. Nun hat er noch soviel Cent, wie er bei Spielbeginn an € hatte. Wie viel Geld hatte er bei Spielanfang?
23. An der Sitzung eines Vereins nahmen 220 Personen teil. Es waren 200 Männer mehr als Frauen anwesend. Wie viel Frauen waren zugegen?
24. In der Aula einer Schule können Schüler so verteilt werden, dass entweder 24 oder 25 Schüler in einer Reihe sitzen. Im ersten Fall fehlen 15 Plätze, im zweiten Fall sitzen in der letzten Reihe nur 15 Schüler. Wie viele Reihen und wie viel Schüler sind es?

B 2. Binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. $(x-y)^2$ | 2. $(2x-y)^2$ | 3. $(x-2y)^2$ |
| 4. $(2x-3y)^2$ | 5. $(1-x)^2$ | 6. $(1-3x)^2$ |
| 7. $(5x-2y)^2$ | 8. $(3x-3y)^2$ | 9. $(5x-6y)^2$ |
| 10. $(4x-6y)^2$ | 11. $(9x-5y)^2$ | 12. $(5x-8y)^2$ |

Beispiel: $59^2 = (60-1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 13. 69^2 | 14. 99^2 | 15. 49^2 |
| 16. 78^2 | 17. 58^2 | 18. 28^2 |

Gleichungen mit Binomen

19. $(4x-3)^2 + (3x-4)^2 = (5x-6)^2 + 49$
20. $(8x-3)^2 + (6x-5)^2 = (10x-6)^2 + 70$
21. $(11x-12)^2 + (10x-4)^2 + (2x-1)^2 = (15x-11)^2 + 4$
22. $(13x-2)^2 + (2x-5)^2 = (12x-5)^2 + 29x^2 + 100$
23. $(8x-3)^2 + (15x-4)^2 = (17x-5)^2 + 14$
24. $(12x-4)^2 + (5x-6)^2 = (13x-7)^2 + 55$
25. $(13x-4)^2 - (5x-3)^2 = (12x-6)^2 + 41$
26. $(10x-3)^2 - (6x-2)^2 = (8x-3)^2 + 20$
27. $(8x-4)^2 - (6x-3)^2 = (5x-4)^2 + 3(x^2+1)$
28. $(7x-3)^2 - (4x-3)^2 = (6x-3)^2 - 3(x^2-3)$
29. $(5x-1)^2 - (4x-1)^2 = (3x-1)^2 + 7$
30. $(8x-2)^2 - (7x-3)^2 = (4x-1)^2 - (x^2-12)$

C 3. Binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Bedenke: Die Klammern lassen sich vertauschen, ohne dass sich der Wert ändert!

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $(8a+7b)(8a-7b)$ | 2. $(6x+5y)(6x-5y)$ | 3. $(5a+6b)(5a-6b)$ |
| 4. $(3x+7y)(3x-7y)$ | 5. $(5-2x)(5+2x)$ | 6. $(8-3a)(8+3a)$ |
| 7. $(5x-2y)(5x+2y)$ | 8. $(3x-3y)(3x+3y)$ | 9. $(5x+6y)(5x-6y)$ |
| 10. $(4x+6y)(4x-6y)$ | 11. $(9x-5y)(9x+5y)$ | 12. $(5x-8y)(5x+8y)$ |

Beispiele: $61 \cdot 59 = (60+1)(60-1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$
 $67a \cdot 73b = 67 \cdot 73ab = (70-3)(70+3)ab = (70^2 - 3^2)ab = (4900 - 9)ab = 4891ab$

- | | | |
|-------------------|---------------------|----------------------|
| 13. $41 \cdot 39$ | 14. $97 \cdot 103$ | 15. $199 \cdot 201$ |
| 16. $62 \cdot 58$ | 17. $65a \cdot 75b$ | 18. $111x \cdot 89y$ |

Gleichungen mit Binomen

19. $(3x+2)(3x-2) + (4x+2)^2 = (5x+3)(5x-3) + 25$
20. $(6x+5)(6x-5) + (3x+2)^2 = (7x-1)(7x+1) - 4(x^2-1)$
21. $(8x+3)(8x-3) + (6x+2)^2 = (10x+1)(10x-1) + 4(2x+7)$
22. $(10x-2)(10x+2) + (x+5)^2 = (9x+2)(9x-2) + 5(4x^2+9)$
23. $(5x-6)(5x+6) + (2x+2)^2 = (6x-1)(6x+1) - 7(x^2-7)$
24. $(6x+5)(6x-5) + (2x+1)^2 = (7x-1)(7x+1) - 9(x^2-1)$
25. $(8x+2)^2 - (8x+5)(8x-5) = (2x+3)^2 - (2x+10)(2x-10)$
26. $(3x+4)^2 - (2x+1)(2x-1) = (9x^2+25) - (2x-4)(2x+4)$
27. $(6x+2)^2 - (6x+2)(6x-2) = (2x+1)(2x-1) - (2x-9)(2x+9)$
28. $(4x+3)^2 - (4x+4)(4x-4) = 9(x^2+8) - (3x-5)(3x+5)$
29. $(10x+1)^2 - (10x+3)(10x-3) = (4x+1)^2 - (4x-9)(4x+9)$
30. $(6x+3)^2 - (6x+3)(6x-3) = 9x^2+5 - (3x+11)(3x-11)$
31. $(2x+5)^2 - (2x+2)(2x-2) = 8(2x^2+1) - (4x+9)(4x-9)$

Vierlei

1. Ein Güterzug mit 72 Waggons hat 202 Achsen. Wie viel 2- bzw. 4-achsige Waggons sind es?
2. Ein Junge rechnet sich aus, dass er sich mit dem Rest seines Geldes 3 Schokoladenriegel kaufen kann und 50 €-Cent übrig behält. Leih er sich noch 30 €-Cent, kann er sich 4 Riegel kaufen. Was kostet ein Riegel?
3. Eine Schulklasse hat ein Theaterspiel eingeübt und führt es zugunsten ihrer Patenklasse in Südamerika auf. Der Eintritt für Erwachsene kostet 8,- €, für Schüler 4,50 €. Sie verkauften 208 Karten und nehmen 1.170,50 € ein. Nun wollen sie wissen, wie viel Erwachsene und wie viel Schüler gekommen waren.
4. Ein Vater verdient 1 1/2 mal soviel wie sein Sohn. Der Sohn arbeitet 4 Tage in der Woche, der Vater 5 Tage. Beide verdienen zusammen 1.035,- €. Wie viel verdient jeder?
5. Eine Bauersfrau bringt 300 Eier zum Markt. Zuerst verlangt sie 30 €-Cent für ein Ei, gegen Ende des Marktes 27 €-Cent. Sie nahm 87,54 € ein. Wie viel hatte sie von jeder Preisklasse verkauft?
6. Ein Großvater bestimmt in seinem Testament, dass sein Sohn viermal so viel bekommen soll wie jedes der 5 Enkelkinder. Er hinterlässt 40.500,- €. Wie viel bekommt jeder?
7. Ein Sportverein sammelte das Jahr über für Weihnachtsgeschenke für Bedürftige (9 Frauen, 7 Männer, 15 Kinder). Für jede Frau sollte 100,- € mehr als für jeden Mann und für jeden Mann 80,- € mehr als für jedes Kind ausgegeben werden. Sie hatten 5.900,- € gesammelt. Wie viel konnte für jeden ausgegeben werden?
8. Ein Großvater möchte 6.000,- € so an seine 5 Enkel verteilen, dass die 3 über 16 Jahre alten je 150,- € mehr als die jüngeren erhalten. Wie verteilt er den Betrag?
9. Aus einem Nachlass sollen 93.000,- € so an die 5 Enkel verteilt werden, dass jedes jüngere Kind doppelt so viel wie das ältere vor ihm bekommt. Wie ist das Geld zu verteilen?
10. Vier Kaufleute gründeten ein Handelsgeschäft. Der zweite zahlte das Vierfache, der dritte das Sechsfache und der vierte das Neunfache des ersten ein. Am Jahresende waren 30.000 € Gewinn zu verteilen. Wie viel bekam jeder?
11. In seinem Testament hatte ein Mann bestimmt, dass seine Frau 30.000,- € mehr und jedes verheiratete Kind 5.000,- € mehr als ein unverheiratetes bekommt. Er hinterließ 138.000,- €, 3 Kinder waren verheiratet, 2 nicht. Wie viel bekommt jeder?
12. Vier Freundinnen spielten ein Lotterielos, und zwar bezahlte Ursula 12 €, Elfriede 18 €, Irmgard 27 € und Ruth 34 €. Sie gewannen 10.010 €. Wie viel bekommt jede?
13. In einer Gesellschaft verhält sich die Anzahl der Damen zu den Herren wie 6:7. Nachdem 3 Damen und 2 Herren fortgegangen waren, betrug das Verhältnis 5:6. Wie viele Damen und Herren waren es?

Zahlenrätsel mit Brüchen

36. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler 12 und zum Nenner 13, so entsteht ein Bruch vom Wert $3/4$.
37. Der Nenner eines Bruches ist um 2 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler 1 und zum Nenner 7, so entsteht ein Bruch vom Wert $1/2$.
38. Zähler und Nenner eines Bruches betragen zusammen 10. Verdoppelt man den Zähler und subtrahiert gleichzeitig vom Nenner 4, so entsteht ein Bruch vom Wert 2.
39. Welche Zahl muss man zum Zähler und Nenner des Bruches $2/5$ addieren, damit ein Bruch vom Wert $4/5$ entsteht?
40. Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner des Bruches $19/25$ subtrahieren, damit ein Bruch vom Wert $3/4$ entsteht?
41. Ein Bruch hat den Wert $2/3$. Vermehrt man seinen Zähler um 4, seinen Nenner um 3, so hat der entstandene Bruch den Wert $3/4$.
42. Ein Bruch hat den Wert $4/7$. Vermehrt man seinen Zähler um 16 und vermindert man den Nenner um 5, so erhält man seinen Kehrwert.
43. Ein Bruch hat den Wert $4/5$. Vermindert man den Zähler um 8 und vermehrt man den Nenner um 2, so hat der entstandene Bruch den Wert $1/2$.
44. Welche Zahl muss man von Zähler und Nenner des Bruches $9/11$ subtrahieren, damit der neue Bruch den Wert $2/3$ erhält?
45. Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner von $40/51$ subtrahieren, und zum Zähler und Nenner $8/13$ addieren, damit gleichwertige Brüche entstehen?
46. Der Zähler und der Nenner des Bruches $2/5$ sollen um eine Zahl so vermehrt werden, dass $4/5$ herauskommt.
47. Vermindert man Zähler und Nenner des Bruches $5/7$ um dieselbe Zahl, so erhält man $1/2$. Wie heißt die Zahl?
48. Die Summe des Zählers und des Nenners eines Bruches ist 84. Seine Grundform aber ist $2/5$.
49. Multipliziere ich den Zähler eines Bruches mit 7 und den um 1 größeren Nenner mit 8, so erhalte ich den Bruch $7/12$.
50. Den Zähler eines Bruches mal 5 und den um 3 größeren Nenner durch 5 geteilt ergibt 10.

D Terme und Gleichungen mit allen Binomischen Formeln

1. $(2a + 3b)^2 + (4a - 2b)^2 + (3a + b)^2 + (a - b)(a + b)$
2. $(3a - 4b)^2 + (9a + b)^2 - (3a - 2b)^2 + (4a - b)(4a + b)$
3. $(4a - b)(4a + b) - (3a + 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - (a + 6b)^2$
4. $(8a - 5b)^2 - (4a + 3b)(4a - 3b) + (3a - 4b)^2 - (2a - b)^2$
5. $(3a + 2b)^2 + (4a - 3b)^2 - (5a - b)(5a + b) + (3a - 8b)^2$
6. $(10a + 4b)^2 - (5a + 2b)^2 + (4a + b)(4a - b) - (4a + b)^2$
7. $(8a - 3b)^2 + (4a - 5b)^2 - (7a + 2b)(7a - 2b) - (3a + 2b)^2$
8. $(9a + 8b)^2 - (7a + 3b)(7a - 3b) - (6a - 7b)^2 + (5a + 2b)^2$
9. $(11a + 5b)^2 + (8a - 7b)^2 - (9a + b)(9a - b) - (4a - b)^2$
10. $(12a - 5b)^2 - (7a - 5b)^2 - (4a - 3b)^2 - (a - 3b)^2$
11. $(x + 5)^2 + (x + 6)^2 = (x + 1)^2 + (x + 4)^2 + 56$
12. $(3x - 2)(3x + 2) + (4x + 3)^2 = (5x + 1)^2 + 18$
13. $(3x - 5)^2 + (7 + 2x)^2 = (2x - 3)^2 + 9x^2 + 65$
14. $(3x + 5)^2 - (x + 2)^2 = (2x + 3)^2 + (2x + 1)^2 + 41$
15. $(4 - 3x)^2 + (4x - 1)^2 = (6 - 5x)^2 + 9$
16. $(8x - 5)(8x + 5) - (6x + 5)(6x - 5) = (5x - 2)^2 + 3x^2 + 16$
17. $(5x - 4)^2 - (4x - 7)^2 = (3x - 2)^2 + 19$
18. $(2x + 5)^2 + (x + 5)^2 = (x + 8)^2 + (2x + 3)^2 - 13$
19. $(3x + 5)(3x - 5) + (5x - 3)^2 = (7x - 1)^2 - 5x(3x + 4) - 1$
20. $(5x - 4)^2 + (4x - 3)^2 = (8x - 7)^2 - 23(x^2 - 1) + 1$
21. $(10x + 7)^2 - (6x + 7)^2 = (8x + 5)^2 - 5(5x - 9)$
22. $(5x - 6)(5x + 6) - (4x - 3)(4x + 3) = (3x - 2)(3x + 2) - (3x + 2)$
23. $(8x + 1)^2 - (7x - 1)^2 = (3x + 2)(5x + 4)$
24. $(5x - 6)^2 + (3x + 4)(3x - 4) = (6x - 7)^2 + (x + 17) - 2x^2$
25. $(3x + 8)^2 + (4x + 7)^2 = (5x + 8)^2 + 97$
26. $(9x + 8)^2 - (8x + 5)^2 = (4x + 5)^2 - x(11 - x) + 49$
27. $(10x - 11)^2 = (6x - 5)^2 + (8x - 11)^2 + 7$
28. $(8x + 3)^2 - (7x + 5)(7x - 5) = (5x + 2)(3x + 4) + 48$

Ausklammern

Ausklammern bedeutet, in einer algebraischen Summe in den Summanden Gleichartiges zu erkennen, genauer gleiche Faktoren, und diese dann vor eine gemeinsame, neu zu bildende Klammer zu ziehen. Dies hat zwei Vorteile:

1. Der neue Ausdruck ist in der Regel kürzer – er hat allerdings Klammern.
2. Aus einer Summe wurde ein Produkt. Wir sagen, die Summe wurde faktorisiert. Besonders die zweite Eigenschaft lässt sich oft günstig für Rechnungen ausnutzen.

Beispiele:

$$5a + 5b = 5(a + b)$$

$$48a - 72b = 2 \cdot 24a - 3 \cdot 24b = 24(2a - 3b)$$

$$2c^5 + 3c^3 = 2c^3c^2 + 3c^3 = c^3(2c^2 + 3)$$

Man sieht, Zahlen lassen sich zerlegen. Es ist also gut, die Primfaktorzerlegung der Zahlen zu kennen.

Potenzen lassen sich zerlegen. Diese Gesetze sind in den Potenzsätzen beschrieben. Zerlege erst die Zahlen in ihre Primfaktoren, dann die übrigen Faktoren.

A Einfache und komplexere Terme

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. $3a + 3b$ | 2. $6x + 6y$ | 3. $7x + 7y$ |
| 4. $4a + 8b$ | 5. $5a - 15b$ | 6. $12x + 15y$ |
| 7. $21a + 35b$ | 8. $9a - 27b$ | 9. $60x - 72y$ |
| 10. $ax + ay$ | 11. $ax - ay$ | 12. $ax + a$ |
| 13. $ax - a$ | 14. $a^2 + a$ | 15. $a^2 - a$ |
| 16. $a^3 - a^2$ | 17. $a^3 + a^2$ | 18. $a^3 + a$ |
| 19. $2ax + 2ay$ | 20. $15ax + 5x$ | 21. $18a^2 + 12ax$ |
| 22. $a^2 + ab$ | 23. $4a^2 - 2a$ | 24. $ax + x^2$ |
| 25. $33a - 44b$ | 26. $25x^2 - 15x$ | 27. $x^3 - x^5$ |
| 28. $4a^2 - 4a$ | 29. $8ab - 16a^2$ | 30. $35ax - 30ay$ |
| 31. $5a + 5b + 5c$ | 32. $8x + 8y + 8z$ | 33. $3a + 6b + 9c$ |
| 34. $4x + 8y + 12z$ | 35. $15a - 10b + 25c$ | 36. $27x - 36y + 54z$ |
| 37. $18a^2b - 36ab^2 + 27abc$ | 38. $55x^3y^2 - 33xy^4 + 66xy^2z^2$ | |
| 39. $72abc^2 - 60ab^2c - 144a^2bc$ | 40. $132x^2y + 88xy^2 + 220xyz$ | |
| 41. $45a^2b + 15ab^2 + 5ab$ | 42. $32a^2bc + 56ab^2c + 64abc^2$ | |
| 43. $27x^2 + 54y^2 + 81z^2$ | 44. $21abx + 28aby + 35abz$ | |
| 45. $2a(a + b) + 3b(a + b)$ | 46. $4x(a - b) - 3y(a - b)$ | |
| 47. $4x(a + 2b) + 5y(a + 2b)$ | 48. $6a(2x - 3y) - 7b(2x - 3y)$ | |
| 49. $2x^2(a - 3b) - 3y^2(a - 3b)$ | 50. $12x(2a + 5b) - 15y(2a + 5b)$ | |
| 51. $7x(4a - 7b) + 14y(4a - 7b)$ | 52. $35a(3x + y) - 42b(3x + y)$ | |

22. Zieht man vom Dreifachen einer Zahl 65 ab, so erhält man 1 weniger als die Zahl. Wie heißt sie?
23. Der 3., 5. und 6. Teil einer Zahl geben zusammen um 3 weniger als die Zahl. Wie heißt sie?
24. Der Pfeiler einer Brücke steckt zu $\frac{1}{4}$ im Boden, zu $\frac{1}{5}$ ist er im Wasser und 12,1 m ragen heraus. Wie lang ist er insgesamt?
25. Wenn man das 4,5-fache einer Zahl um 12 vergrößert und dann durch 3 teilt, erhält man das Doppelte der Zahl. Wie heißt sie?
26. Das Dreifache einer Zahl liegt um ebenso viel über 80, wie die Zahl unter 80. Wie heißt sie?
27. Wir denken uns drei aufeinanderfolgende Zahlen. Addiert man von der ersten die Hälfte, von der zweiten ein Drittel, von der dritten ein Viertel, so ist der Summenwert 16.
28. Dividiert man 15 durch eine Zahl und 12 durch die folgende Zahl, so erhält man zwei Quotienten, deren Differenz gleich 30 dividiert durch das Produkt der Zahlen ist.
29. Das Fünffache meiner Zahl liegt um ebenso viel über 120, wie das Dreifache unter 120. Wie heißt sie?
30. Addiere ich zum 7-fachen meiner Zahl ihren dritten Teil, so erhalte ich das 6-fache meiner um 2 vermehrten Zahl.
31. Das Fünffache einer Zahl weniger sieben dazu das Dreifache der Zahl und elf ist genau so viel wie das Fünfzehnfache der Zahl weniger dreizehn weniger das Vierfache der Zahl, dem sieben zugezählt wird.
32. Das Fünffache einer Zahl weniger acht, mit sieben malgenommen, dazu das Neunfache der Zahl weniger sieben, mit vier malgenommen, ist soviel wie das Siebenfache der Zahl weniger eins, mal neun, weniger das Siebenfache der Zahl weniger vier, das mit drei malgenommen wird.
33. Das Doppelte einer Zahl weniger vier, mit elf malgenommen, weniger das Fünffache der Zahl weniger sieben, mit drei malgenommen, ist so viel wie das Vierfache der Zahl weniger zehn, das mit sechs malgenommen wird, und von dem das Fünffache der Zahl weniger dreizehn mit vier malgenommen, abgezogen wird.
34. Ziehe vom Vierfachen einer Zahl drei ab, nimm mit sieben mal, zähle das Dreifache der Zahl weniger vier, das mit drei malgenommen wird, hinzu, so erhältst Du dasselbe wie das Fünffache der Zahl weniger drei, das mit sieben malgenommen wird, und von dem die Zahl und zwei, mit zwei mal genommen, abgezogen wird.
35. Nimm das Fünffache einer Zahl und vier mit sieben mal, und ziehe das Siebenfache der Zahl weniger fünf, das mit sechs malgenommen wird ab, so ist es gleich dem Vierfachen der Zahl und drei, das mit acht malgenommen wird, wovon das Neunfache der Zahl und vier, das mit zwei malgenommen wird, abgezogen wird.

Zahlenrätsel

- Das Sechsfache einer Zahl ist um 14 größer als ihr Vierfaches.
- Addiert man zum Dreifachen einer Zahl 18, so ergibt das 12 weniger ihr Fünffaches.
- Zwei Zahlen zusammengezählt ergeben 11. Zählt man zum Fünffachen der einen das Siebenfache der anderen Zahl, so erhält man 69.
- Die Addition zweier Zahlen ergibt 13. Das Dreifache der einen vom Fünffachen der anderen abgezogen ergibt 1.
- Die Differenz zweier Zahlen ist 13. Zieht man vom Dreifachen der größeren Zahl das Sechsfache der kleineren ab, so erhält man 3.
- Das Verhältnis zweier Zahlen ist 5:7. Subtrahiert man von der ersten 3 und von der zweiten 7, so ist das Verhältnis 6:7.
- Zwei Zahlen verhalten sich wie 7:9 zueinander. Addiert man zur ersten 3 und subtrahiert man von der zweiten 12, so ist ihr Verhältnis 8:5.
- Der Zähler eines Bruches ist um 5 kleiner als der Nenner. Subtrahiere ich von ihm 3 und zähle zum Nenner 4 zu, so ist der neue Wert 1:4.
- Die Summe zweier Zahlen ist 44. Die erste durch 4 geteilt, zur zweiten 21 addiert und die Ergebnisse zusammengezählt, ergibt ebenfalls 44.
- Von zwei Zahlen ist die zweite um 1 größer als die erste. Subtrahiert man vom Vierfachen der ersten ein Drittel der zweiten, so erhält man 40.
- Zähler und Nenner eines Bruches ergeben addiert 13. Multipliziere ich den Zähler mit 6 und den Nenner mit 3, so hat der neue Bruch den 8:9.
- Die Differenz zweier Zahlen ist 16. Ein Fünftel der größeren addiert zu einem Drittel der kleineren ergibt 8.
- Multipliziert man eine Zahl mit der um 1 größeren, so erhält man 200 mehr, als wenn man sie mit der um 1 kleineren multipliziert.
- Ver mehrt man eine Zahl um 4 bzw. um 9, so wird der Quotient der beiden Summen gleich $\frac{4}{5}$.
- Subtrahiert man von 105 das 6-fache einer um 4 vermehrten Zahl, so erhält man 51.
- Addiert man zu 87 das 3-fache einer Zahl, so erhält man 105.
- Addiert man zu einer Zahl ihren fünften Teil und das Dreifache, so erhält man 126.
- Meine gedachte Zahl und 8, geteilt durch 11 ist dasselbe wie die Zahl weniger 8, geteilt durch 7.
- Zerlege die Zahl 240 so in zwei Summanden, dass der Quotient der Summanden den Wert $\frac{3}{7}$ hat.
- Zerlege die Zahl 100 so in zwei Summanden, dass $\frac{2}{5}$ des ersten Summanden um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des zweiten Summanden.
- Zählt man zum Fünffachen einer Zahl 20 dazu, so erhält man 60. Wie heißt die Zahl?

B Binome ausklammern

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $a^2 - b^2$ | 2. $x^2 - y^2$ | 3. $4a^2 - b^2$ |
| 4. $16x^2 - y^2$ | 5. $9x^2 - 4y^2$ | 6. $25a^2 - 36b^2$ |
| 7. $1 - 81x^2$ | 8. $x^2 - 1$ | 9. $49a^2 - 1$ |
| 10. $2a^2 - 2b^2$ | 11. $5x^2 - 5y^2$ | 12. $18x^2 - 50y^2$ |
| 13. $75a^2 - 48b^2$ | 14. $300x^2 - 243y^2$ | 15. $121a^2 - 144b^2$ |
| 16. $a - a^3$ | 17. $4a - 4a^3$ | 18. $5x - 125x^3$ |
| 19. $8ax^2 - 50ay^2$ | 20. $3abx^2 - 3aby^2$ | 21. $48a^2x^2 - 75a^2y^2$ |
| 22. $xy^2 - x$ | 23. $abx - abx^3$ | 24. $a^4 - a^2$ |
| 25. $x^2 + 2xy + y^2$ | 26. $a^2 + 2ab + b^2$ | 27. $9x^2 + 6xy + y^2$ |
| 28. $9x^2 + 12xy + 4y^2$ | 29. $4x^2 + 12xy + 9y^2$ | 30. $16a^2 + 24ab + 9b^2$ |
| 31. $x^2 - 2xy + y^2$ | 32. $4x^2 - 4xy + y^2$ | 33. $36a^2 - 108ab + 81b^2$ |
| 34. $25a^2 - 40ab + 16b^2$ | 35. $49x^2 - 42xy + 9y^2$ | 36. $3a^2 + 6ab + 3b^2$ |
| 37. $121x^2 + 264xy + 144y^2$ | 38. $5x^3 - 10x^2y + 5xy^2$ | |
| 39. $50a^2 - 40a + 8$ | 40. $25x^3 - 60x^2y + 36xy^2$ | |
| 41. $64ax^2 + 16axy + ay^2$ | 42. $18x^2 - 12xy + 2y^2$ | |
| 43. $320a^2 + 400ab + 125b^2$ | 44. $36ax^2 - 84axy + 49ay^2$ | |
| 45. $25ax^2 + 40axy + 16ay^2$ | 46. $49ax^2 - 154axy + 121ay^2$ | |
| 47. $72ax^2 - 24axy + 2ay^2$ | 48. $125ax^2 + 300axy + 180ay^2$ | |

Brüche und Gleichungen - Erweitern und Kürzen

Für das Erweitern und Kürzen bei Brüchen muss man die Multiplikation und Division algebraischer Zahlen sicher beherrschen. Deshalb kommen hier zuerst einige Vorübungen zu diesem Thema. Das selbe gilt für die Klammerregeln, Ausklammern und Durchmultiplizieren.

Bedenke: Potenzrechnung bindet stärker als Punktrechnung und die stärker als Strichrechnung. Das heißt: Erst die Potenzen berechnen, dann malnehmen und teilen, dann erst zusammenzählen und abziehen!

Multiplikation, Division und Ausklammern

Multiplikation:

1. $(+9) \cdot (-12a)$
2. $(-8) \cdot (-13b)$
3. $(-12) \cdot (+4x)$
4. $(+x^2) \cdot (-x)$
5. $(+x^2) \cdot (+x^2)$
6. $(-x^2) \cdot (-x^2)$
7. $(-2a) \cdot (-3b) \cdot (-2c)$
8. $(+6a^2) \cdot (-a) \cdot (-3a)$
9. $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$
10. $(-6) \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot (-4)$
11. $(-1)^3$
12. $(-1)^2$
13. $(-x)^3$
14. $(-3)^2 \cdot (-1)^3$
15. $(+x)^2 \cdot (-x)^2$
16. $(+a)^3 \cdot (-2)^3$
17. $(-a)^4 \cdot (-1)$
18. $(+3a) \cdot (+2) + (+4a) \cdot (-3) - (+3a) \cdot (-2)$
19. $(-4a) \cdot (-2) - (3a) \cdot (+2) + (4a) \cdot (-1)$
20. $(5x) \cdot (-1) + (-5x) \cdot (-1) - (5x) \cdot (-1)$
21. $(5y) \cdot (-2) - (4y) \cdot (+3) + (3y) \cdot (-4)$
22. $(-6a) \cdot (-3) - (+a) \cdot (+4) - (2a) \cdot (-1)$

Division:

23. $(-84x^2) : (-12x^2)$
24. $(48a) : (-8)$
25. $(60x^3) : (-x^2)$
26. $(-a^2) : (+a)$
27. $(-a^2) : (+a^2)$
28. $(-a^2) : (-8a^2)$
29. $(-91x) : (7x)$
30. $(-y) : (-1)$
31. $(-35a^2) : (-35)$
32. $(-96b) : -(24b)$
33. $(-45a) : (+9) + (-42a) : (-14) - (+84a) : (-12)$
34. $(-48x) : (12) - (55x) : (-5) - (-80x) : (2)$
35. $(-77a) : (-7a) - (24a) : (-4a) + (30a) : (10a)$
36. $(2a + 2b) : (+2) + (4a + 6b) : (+2) + (4a + 6b) : (-2)$
37. $(30x - 40y) : (-10) + (20x - 25y) : (+5) - [(12x + 16y) : (-4)]$

Ausklammern:

38. $(18x^2 - 12x^2) : (-6x^2) - (12x^2 - 9x) : (3x) + (25x^3 - 15x^2) : (-5x^2)$
39. $(18a - 27b) : (9) - (21a + 28b) : (-7) - (26a - 39b) : (-13)$
40. $(5x - 15x) : (5x) + (12ax + 16a) : (-4a) - (6x^3 + 18x^2) : (-2x^2)$
41. $(5a^2 - 5) : (5) - (12a^2 + 6) : (-3) + (8a^2 - 8) : (-8)$
42. $(12ab - 15b) : (3b) + (18a^2 + 12a) : (-3a) - (16a - 24) : (-8)$
43. $(21a^3 + 14a^2) : (-7a^2) - (12ab + 15b) : (-3b) + (34a - 51) : (-17)$

9. Eine einsam gelegene Insel wurde im 19. Jahrhundert alle vier Wochen mit Lebensmitteln für die 36 Erwachsenen, 11 Jugendlichen und 5 Kinder beliefert. Man rechnete täglich mit 46,2 kg Getreideerzeugnissen, 5,22 kg Fleisch und 2,72 kg Fett, wobei ein Jugendlicher 600 g Getreideerzeugnisse, 20 g Fleisch und 20 g Fett mehr als ein Erwachsener, und ein Kind 400 g Getreideerzeugnisse, 40 g Fleisch und 20 g Fett weniger als ein Erwachsener bekommen sollte. Einen Tag nach der Abfahrt des Versorgungsschiffes zerschellte ein Segelschiff mit 8 Erwachsenen und 2 Jugendlichen an den Klippen der Insel. Berechne:
 - a) den geplanten Verbrauch je Person einer Altersgruppe und
 - b) wie viel jetzt nur noch täglich je Person verbraucht werden durfte (nur volle Gramm).

Allgemeine Textaufgaben

Beachte: Ab und zu gibt es bei den Textaufgaben der folgenden Seiten auch schräge Bruchstriche.

- In einer Familie verdient der Sohn als Lehrling eine bestimmte Summe. Der Vater verdient das Fünffache weniger 50 €, die Mutter in Teilzeitarbeit 300 € mehr als der Sohn und die Tochter für Aushilfsarbeiten 150 € weniger als der Sohn. Wie viel verdient jeder, wenn der Vater 700 € mehr verdient als die anderen Familienmitglieder zusammen?
- Onkel Sebastian schenkt seinen Neffen Äpfel: dem ersten die Vierfache Grundmenge weniger 5 Äpfel, dem zweiten die fünffache Grundmenge weniger 10 Äpfel und dem dritten die doppelte Grundmenge und 5 Äpfel. Das erste und zweite Kind erhalten doppelt so viel wie das dritte Kind. Wie viel bekommt jedes Kind?
- Ein Großvater bestimmt in seinem Testament, dass das älteste Enkelkind den doppelten Grundbetrag weniger 2000 € bekommen soll, das folgende den dreifachen Grundbetrag weniger 3000 €, das dritte den vierfachen Grundbetrag weniger 4000 € und das jüngste den fünffachen Grundbetrag weniger 5000 €. Er hinterlässt 84000 €. Wie viel bekommt jedes Enkelkind?
- Für ein Jugendradrennen waren 600 € als Gesamtpreis ausgesetzt worden. Der Sieger sollte dreimal, der zweite zweimal so viel wie der Drittplatzierte bekommen. Es erreichten aber zwei Fahrer gleichzeitig als zweite das Ziel. Wie viel bekommt jeder der vier Sieger?
- Bei einem Geländeradrennen sollte der Sieger das Siebenfache und der zweite das Fünffache des Dritten erhalten. Dafür waren 650 € ausgesetzt worden. Es gingen aber zwei Fahrer als erste gleichzeitig durchs Ziel. Wie viel bekam jeder?
- Als Weihnachtsgabe für die Aussiedlerlager hatte eine Gemeinde 31.000 € gespendet; es sollte jeder der 126 Erwachsenen viermal so viel und jeder der 34 Jugendlichen zweimal so viel wie eines der 48 Kinder bekommen. Drei Tage vor der Feier kamen weitere Aussiedler (28 Erwachsene, 13 Jugendliche, 17 Kinder). Welchen Betrag konnte jetzt jeder Erwachsene, jeder Jugendliche bzw. jedes Kind bekommen?
- a) Für ein Flüchtlingslager mit 47 Erwachsenen, 15 Jugendlichen und 22 Kindern waren 15.900 € gesammelt worden. Die Jugendlichen sollten 120 € weniger und die Kinder 150 € weniger als ein Erwachsener bekommen. Wie viel war für jeden gedacht worden?
b) Durch Zu- und Weggang waren aber schließlich 39 Erwachsene, 21 Jugendliche und 28 Kinder zu beschenken. Wie viel bekam jeder?
- Eine kleine Gemeinde verteilte alle vier Jahre das gemeinsame Gartenland von 32.000 m² neu. Für ein Kind wird 100 m² weniger als für einen Erwachsenen gerechnet (nur ganze Zahlen).
a) Das Land war an 84 Erwachsene und 106 Kinder zu verteilen.
b) Vier Jahre später waren es 79 Erwachsene und 135 Kinder.
c) Nach weiteren vier Jahren war das Land an 93 Erwachsene und 117 Kinder zu verteilen, wobei diesmal je Kind 80 m² weniger als für einen Erwachsenen verteilt werden sollte.

Erweitern und Kürzen

A Erweitere die Brüche

Bedenke: Erweitern heißt, dass sowohl Zähler als auch Nenner mit der Zahl malgenommen werden.

- $\frac{a}{b}$ mit b
- $\frac{x}{y}$ mit xy
- $\frac{a^2}{b}$ mit a
- $\frac{a^2}{b}$ mit b
- $\frac{x+y}{x}$ mit x
- $\frac{2x+3y}{3x}$ mit $5x$
- $\frac{4x-3y}{4y}$ mit $4y$
- $\frac{3x-2y}{5y}$ mit $2x$

B Ergänze den fehlenden Zähler

Bedenke: Im Nenner auf der rechten Seite steckt verborgen die Erweiterungszahl.

- $\frac{a}{b} = \frac{\quad}{ab}$
- $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\quad}{b^3}$
- $\frac{2a}{3b} = \frac{\quad}{9b^2}$
- $\frac{5x}{6y^2} = \frac{\quad}{12y^2}$
- $\frac{8x^2}{9y} = \frac{\quad}{18y}$
- $\frac{5a}{2bc} = \frac{\quad}{2abc}$
- $\frac{2x-y}{x-y} = \frac{\quad}{2x-2y}$
- $\frac{5a-1}{9a-b} = \frac{\quad}{18a-2b}$
- $\frac{a^2}{a-b} = \frac{\quad}{a^2-b^2}$

C Kürze die folgenden Brüche

Bedenke: Beim Kürzen musst du die gleichen Faktoren sowohl im Zähler als auch im Nenner sehen bzw. finden.

Und: Kürze NIE in eine Summe hinein, d.h. vor dem Kürzen muss ausgeklammert werden!

Und weiter: Denke bei manchen Nennern an die 3. Binomische Formel.

- $\frac{-8n^2}{-4n}$
- $\frac{-30xy}{-10x^2}$
- $\frac{45a^3b^2c}{15ab^2c^3}$
- $\frac{5a+5b}{9b+9b}$
- $\frac{a^2-a}{a^3-a^2}$
- $\frac{25a^2+25a}{10a^2+10a}$
- $\frac{3a^2-ab}{3ab-b^2}$
- $\frac{a-b}{9b-a}$
- $\frac{4a^2+ab}{a^2-b^2}$
- $\frac{15y-15xy}{1-x^2}$
- $\frac{x^2-4a^2}{16ax-8x^2}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

A - Gleiche Nenner

Bedenke: Bruchstriche haben die gleiche verbindende Wirkung wie Klammern. Wenn du diese Terme im Taschenrechner eingeben würdest, müsstest du sowohl um den Zähler als auch um den Nenner eine Klammer schreiben.

$$1. \frac{4}{7} - \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{6}{7} \quad 2. \frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5} \quad 3. \frac{20x}{y} - \frac{13x}{y} + \frac{6x}{y} - \frac{11x}{y}$$

$$4. \frac{9a-7b}{8c} - \frac{8a-3b}{8c} - \frac{12b-7a}{8c} + \frac{3a-5b}{8c} + \frac{5a-3b}{8c}$$

$$5. \frac{67a+75x}{4c} + \frac{24a-3x}{4c} - \frac{23a-32x}{4c}$$

$$6. \frac{28-17x}{2ax} - \frac{19-9x}{2ax} - \frac{9-10x}{2ax}$$

$$7. \frac{a+2b+c}{abc} + \frac{2a-b+c}{abc} - \frac{b+2c-a}{abc}$$

B - Ungleiche Nenner

Bedenke: Du musst erst den **Hauptnenner** suchen und die Brüche gleichnamig machen, d.h. du musst erweitern. Ein sicherer Hauptnenner ist immer das Produkt aller Nenner, aber dieser ist oft nicht der kleinste.

$$1. \frac{5}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \quad 2. \frac{5}{6} - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \quad 3. \frac{7}{9} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$$

$$4. \frac{3}{4x} + \frac{1}{5x} - \frac{5}{6x} - \frac{7}{7x} \quad 5. \frac{11x}{15a} - \frac{3x}{25a} + \frac{8x}{3a} - \frac{7x}{10a}$$

$$6. \frac{11}{14b} + \frac{1}{4b} + \frac{6}{5b} - \frac{3}{7b} - \frac{7}{10b} \quad 7. \frac{5a}{8x} + \frac{a}{x} - \frac{9a}{20x} - \frac{a}{4x} + \frac{4a}{5x}$$

$$8. \frac{8a-5b}{15} - \frac{2a+3b}{9} + \frac{5a+6b}{10} \quad 9. \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{8a-3b}{4a} - 1$$

$$10. \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad 11. \frac{5a+2b}{4ab} + \frac{4b-3a}{6a^2} - \frac{2a+5b}{3b^2}$$

$$12. \frac{5a^2+9a+1}{12a^2} - \frac{19a+6}{8a} + 2 \quad 13. \frac{x-1}{2x+1} - \frac{4x-7}{4(2x+1)}$$

$$14. \frac{2a+b}{a(a+b)} + \frac{a-2b}{b(a+b)} + \frac{a-b}{ab} \quad 15. \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$16. \frac{3}{a+2} - \frac{2a+5}{(a+2)^2} \quad 17. \frac{2a-b}{a+b} + \frac{a-2c}{a+c}$$

$$18. \frac{2a-b}{a-b} + \frac{2a+b}{a+b} \quad 19. \frac{5a+7b}{12a+6b} - \frac{a+b}{2a+b} + \frac{3a+2b}{16a+8b}$$

Textaufgaben

Vorbemerkung:

Die oftmals auftauchende Schwierigkeit, den Ansatz für die Lösung einer Textaufgabe zu finden, liegt eigentlich nicht im mathematischen Handwerkszeug begründet, sondern in der Umsetzung der Alltagssprache in logische Strukturen.

Hierfür gibt es aber einige Kniffe:

Lies erst mal den ganzen Aufgabentext durch, vielleicht sogar zwei oder drei mal.

Schreibe einfach auf ein Blatt, was dir Satz für Satz einfällt.

Dann ziehe die Verbindungen zwischen den Teilen, entweder in Gedanken oder direkt mit Strichen. Scheue dich nie, zu malen oder Diagramme zu skizzieren.

Denke vielleicht auch mal an ein Gedicht und dann an den darin verborgenen Zeitablauf. Wenn du damit ein Problem hast, lies doch Ferdinand Meyers „Die Füße im Feuer“ und überlege, welcher Vers eine Handlung vor oder nach dem Abend, mit dem die Handlung beginnt, beschreibt.

Irgendwann musst du dir aber einen innerlichen Ruck geben und einen Anfang setzen. Das ist das Wichtigste, der ANSATZ.

Bei der nachfolgenden ersten Aufgabe will man wissen, was die einzelnen Familienmitglieder verdienen, aber alle Aussagen beziehen sich irgendwie auf den Verdienst des Sohnes. Den kennen wir nicht. Aber wir können sagen, dass wir diesen unbekanntem Verdienst mit diesem komischen Begriff, dem Ding der alten Araber, also diesem x bezeichnen. Das war der schwerste Teil: Der Beginn des Ansatzes!

In einer Familie verdient der Sohn als Lehrling eine bestimmte Summe.

Der Vater verdient das Fünffache weniger 50 €,

die Mutter in Teilzeitarbeit 300 € mehr als der Sohn und

die Tochter für Aushilfsarbeiten 150 € weniger als der Sohn.

Wie viel verdient jeder, wenn der Vater 700 € mehr verdient als die anderen Familienmitglieder zusammen?

Verdienst des Sohnes: x €

Nächster Satzteil: Der Vater verdient das Fünffache weniger 50 €. Es ist hoffentlich klar, dass sich das auf den Verdienst des Sohnes beziehen muss.

Verdienst des Vaters: $5x$ € - 50 € Wenn wir nachher rechnen, lassen wir das „€“ weg!

Verdienst der Mutter: $x + 300$ €

Verdienst der Tochter: $x - 150$ €

Bis dahin haben wir zwar die Verdienste, die sich aufeinander beziehen, aber noch keinen Fixpunkt, denn es fehlt noch eine feste Bezugsgröße. Die steckt im letzten Satz verborgen, wo alle Einkommen zusammen mit dem des Vaters verglichen werden.

Das ist jetzt der Kern der Algebra: Vergleichen und Abwägen. Damit können wir jetzt die Gleichung ansetzen.

Sohn: x plus Mutter: $(x + 300)$ plus Tochter: $(x - 150)$ plus 700 ergibt das, was Vater hat.

In abstrakter Form jetzt die Gleichung: $x + (x + 300) + (x - 150) + 700 = 5x - 50$

Damit kann jetzt die Lösung erfolgen und hierfür gibt es die geübten Rechentechniken. Das heißt, der Rest sollte kein Problem sein. Die Textumsetzung musst du leider oft üben, aber mit jeder Aufgabe wird es leichter.

$$36. \frac{ax+b}{a^2+2ab} + \frac{bx+a}{a^2-2ab} = \frac{ax+a+2b}{a^2-4b^2}$$

$$38. \frac{8b-a}{a^2-9x^2} + \frac{2a-b}{a^2-3ax} + \frac{5}{2a+6x} = 0$$

$$39. \frac{4x-7}{3x+5} - \frac{9x-11}{3x-5} + \frac{15x^2+17x-18}{9x^2-25} = 0$$

$$37. \frac{3x-5}{x-2} + \frac{7x+2}{x-5} = \frac{11-4x}{2-x} - \frac{6x+8}{5-x}$$

$$20. 2 - \frac{11a+14b}{10a+15b} - \frac{3(a+2b)}{4a+6b}$$

$$22. \frac{4a+7}{3a+6} - \frac{3a+5}{2a+4} + \frac{a+4}{6a+12}$$

$$24. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b}$$

$$26. \frac{a+5}{a^2-2a} - \frac{a+30}{2a^2-8} - \frac{a-5}{a^2+2a}$$

$$28. \frac{3a+7}{a^2-4a} - \frac{2a-5}{a^2+4a} - \frac{a+30}{a^2-16}$$

$$30. \frac{2a}{a^2-b^2} - \frac{1}{a-b} + \frac{8a-10b}{a^2+2ab+b^2}$$

$$32. \frac{3a+1}{5a} + \frac{b+2}{2b} - \frac{c+2}{10c}$$

$$34. \frac{7x-y}{x^2} + \frac{x-9y}{y^2} - \frac{4}{x} + \frac{6}{y}$$

$$36. \frac{a+2b}{b(a-b)} - \frac{2a+b}{a(a-b)}$$

$$38. \frac{a-3b}{ab(a-b)} - \frac{a-3c}{ac(a-b)}$$

$$40. \frac{6}{a(a+3)} - \frac{2}{a(a+2)} - \frac{1}{a(a+1)}$$

$$42. \frac{a+6}{2a} + \frac{a-2}{3a} - \frac{a}{a+1}$$

$$44. \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} + \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$46. \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a-1}{a+1}$$

$$48. \frac{2a+x}{(a+x)^2} + \frac{x}{a^2-x^2}$$

$$21. \frac{4a+9}{4a+20} + \frac{3a+4}{3a+15} - \frac{4a+7}{2a+10}$$

$$23. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$25. \frac{2-a}{2+a} - \frac{4+a^2}{4-a^2} + \frac{2+a}{2-a}$$

$$27. \frac{x^2-8}{x^2-9} - \frac{2x-5}{3x-9} - \frac{1}{6}$$

$$29. \frac{3}{2a-3} - \frac{4a+12}{4a^2-9} - \frac{6}{4a^2+12a+9}$$

$$31. \frac{2a-5}{(a-3)^2} - \frac{2a+5}{a^2-9}$$

$$33. \frac{5a+6b}{ab} - \frac{7a+6c}{ac} + \frac{5b-4c}{bc}$$

$$35. \frac{2a+b}{4ab} + \frac{a+4c}{2ac} - \frac{10b-3c}{5bc}$$

$$37. \frac{2a+3x}{ax} - \frac{4b-5x}{bx} + \frac{2c+3x}{cx}$$

$$39. \frac{a+5}{(a+3)^2} - \frac{a+2}{a(a+3)}$$

$$41. \frac{6a+7x}{2a+4x} + \frac{5a-8x}{3a+6x} - \frac{11a-4x}{4a+8x}$$

$$43. \frac{5a+8b}{2a+4b} - \frac{7a+9b}{2a+6b}$$

$$45. \frac{2}{3x+1} - \frac{3(x-1)}{9x^2-1} - \frac{3x}{9x^2-6x+1}$$

$$47. \frac{4}{3a+6} + \frac{5a+3}{3a^2+6a} - \frac{3a+7}{a^2+4a+4}$$

$$49. \frac{a^2+2a-1}{a^2-2a+1} - \frac{a+1}{a-1}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

Bedenke: Ein Bruch wird mit einer (algebraischen) Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der Zahl malgenommen wird.
Ein Bruch wird durch eine (algebraischen) Zahl geteilt, indem der Nenner mit dieser Zahl malgenommen wird.

Und: Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner malgenommen wird. **VORSICHT:** Es müssen dann meist Klammern gesetzt werden, denn ein Bruchstrich hat dieselbe verbindende Wirkung wie eine Klammer !!!

Und weiter: Ein Bruch wird durch einen Bruch geteilt, indem der erste mit dem Kehrwert des zweiten malgenommen wird. Statt des Doppelpunktes kann auch ein Bruchstrich geschrieben werden – dann erhält man einen sogenannten Doppelbruch.

Beispiele: $\frac{5x}{6b} \cdot a = \frac{5ax}{6b}$ und $\frac{5x}{6b} : a = \frac{5x}{6ab}$ und $\frac{5x}{6b} \cdot \frac{3b}{10x} = \frac{5x \cdot 3b}{6b \cdot 10x} = \frac{1}{4}$ und

$$\frac{5x}{6b} : \frac{3b}{10x} = \frac{5x}{6b} \cdot \frac{10x}{3b} = \frac{50x^2}{18b^2} = \frac{25x^2}{9b^2}$$

A Multiplikation:

- $\left(\frac{1}{3b} + \frac{5}{6b}\right) \cdot b$
- $\left(\frac{1}{3x} - \frac{3}{5x}\right) \cdot 4x$
- $\left(\frac{5x}{7} - \frac{3x}{14}\right) \cdot 21x$
- $\left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right) \cdot xy$
- $\frac{56a^2}{55b^2} \cdot \frac{10b}{21a}$
- $\frac{100ac}{9b^2} \cdot \frac{33bc}{40a^2}$
- $\frac{65}{8a} \cdot \frac{14ab}{39c} \cdot \frac{4}{5}$
- $\frac{18xy}{25z} \cdot \frac{35z^2}{6x^2}$
- $\frac{3(a+b)}{20(a-b)} \cdot \frac{25(a-b)^2}{18(a^2-b^2)}$
- $\frac{a^2-4}{b^2-9} \cdot \frac{b+3}{a-2}$

B Division:

- $\frac{8ax}{5by} : \frac{2a}{5b}$
- $\frac{35x^2}{16y^2} : \frac{7x}{8y}$
- $\frac{15abc}{8x} : 3abx$
- $\frac{44by}{27ax} : \frac{55b^2}{24a^2}$
- $\frac{70ab}{27c^2} : \frac{21a}{c}$
- $\frac{2a-2}{4+a} : \frac{4a+4}{4-a^2}$
- $\frac{2a+2}{3a-6} : \frac{a^2-1}{a^2-4}$
- $\frac{a-x}{b} : \frac{x-a}{c}$
- $\frac{(n-1)^2}{n+1} : \frac{n^2-1}{n}$
- $\frac{a^2-4}{a-4} : \frac{a^2+4a+4}{a+4}$

C Gleichungen mit Mehrfachklammern und Brüchen:

Bedenke: Mehrfachklammern werden von innen nach außen aufgelöst.

- $84x + 13a - 7b - 23x + 19b - 41a = 12b + 47x$
- $92 - [(35x + 19) - (28 - 52x)] = 48 - (93x - 95)$
- $x - [2x - (3x - 11) + (4x + 13) - (5x - 15)] = 0$
- $65x - [(41x + 94) - (18x - 45)] = 38x - 67$
- $8x - 70 + [15x - 52 - (19x - 34)] = 44$
- $\frac{11}{12}x - \frac{4}{5} = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$
- $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{8} + 23$
- $\frac{5x}{8} - \frac{3x}{10} = 2x - \frac{4x}{5} - 35$
- $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{12} = \frac{14x}{15} + \frac{4}{5}$
- $\frac{x+5}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{13}{3}$
- $\frac{3x-4}{30} + \frac{2x-3}{10} = \frac{7}{15}$
- $\frac{3x+6}{4} - \frac{4x+5}{6} = \frac{5x+2}{12} - \frac{1}{6}$
- $\frac{4x-5}{9x-5} = \frac{8(x-2)}{18x-26}$
- $\frac{4x+1}{2x-1} = \frac{6x-1}{3x-2}$
- $\frac{5-x}{2+x} = \frac{5+x}{3-x}$
- $\frac{x-1}{x-3} + \frac{2x-3}{2x-6} - \frac{4x-3}{4x-12} = \frac{1}{2}$
- $\frac{3x-1}{2x-1} - \frac{7x-3}{6x-3} + \frac{10x-6}{10x-5} = 1$
- $\frac{1+3x}{3x} + \frac{2+3x}{4x} - \frac{9+7x}{3+4x} = 0$
- $\frac{7x+6}{6x-4} - \frac{4x-3}{3x-2} = \frac{11x-12}{18x-12} - \frac{2}{3}$
- $\frac{5x+2}{2x-1} + \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{16x^2+11}{4x^2-1}$
- $\frac{7x+10}{x+5} - \frac{2x+15}{x+3} = \frac{5x^2-81}{x^2+8x+15}$
- $\frac{2x-4}{4x-8} - \frac{5x+6}{3x-6} + \frac{7x-6}{6x-12} = \frac{x-30}{x^2-2x}$
- $\frac{9x-7}{5x+4} - \frac{7x+9}{5x-4} - \frac{10x^2+8}{25x^2-16} = 0$
- $\frac{6+5x+3x^2}{25-9x^2} + \frac{6+5x}{25-15x} = \frac{3+4x}{10-6x}$
- $\frac{120}{144-x^2} = \frac{x-10}{12-x} + \frac{x+10}{12+x}$
- $\frac{10x+1}{20x+25} + \frac{7x+16}{16x-20} = \frac{15x^2+16x-35}{16x^2-25}$
- $\frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x} - \frac{5x+1}{5x-10} = \frac{x-23}{3x^2-6x} - \frac{2x-3}{4x-8}$
- $\frac{x+2}{x(x+4)} + \frac{3x-4}{x(x+5)} = \frac{4x-3}{(x+4)(x+5)}$
- $\frac{x^2-7x-10}{x^2-4x} + \frac{2x^2-3x-5}{2x^2-8x} = 2$
- $\frac{4x+5}{2x-3} - \frac{5x-4}{2x+3} = \frac{7+5x-2x^2}{4x^2-9}$
- $\frac{ax+b}{a^2+2ab} + \frac{bx+a}{a^2-2ab} = \frac{ax+a+2b}{a^2-4b^2}$
- $\frac{6x-5}{12x} + \frac{3+4x}{20x} - \frac{7x^2-12x+3}{10x^2-15x} = 0$
- $\frac{3x+2a-b}{6a+4b} - \frac{4x+3a-b}{9a-6b} = \frac{x(3a-16b)+b^2}{54a^2-24b^2}$
- $\frac{8-x}{x^2-x} + \frac{2x+5}{3x-3} - \frac{x+7}{6x-6} = \frac{2x-3}{4x-4}$
- $\frac{6x+7a}{20a+5b} - \frac{5x-6a}{16a+4b} = \frac{29ab-ax}{160a^2-10b^2}$